Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds tekniska högskola
Lunds universitet

Tentamen: 2007–11–12 kl 8^{00}–13^{00}
FMS 012 — Matematisk statistik AK för I, 9 hp (6 p)
FMS 012 — Matematisk statistik AK för FPiN, 9 hp (6 p)
FMS 012 — Matematisk statistik AK för CED, 9 hp (6 p)
MAS233 — Matematisk statistik för fysiker, 9 hp (6 p)

Korrekt, väl motiverad lösning på uppgift 1–3 ger 10 poäng vardera medan uppgift 4–6 ger 20 poäng vardera. Totalt kan man få 90 poäng. Gränsen för godkänd är 40 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, Formelsamling i matematisk statistik AK 1996 eller senare, samt miniräknare.

Resultatet anslås *senast* tisdagen den 27 november i matematikhusets entréhall.
Lösningar delas ut i samband med visningen.

---

1. (a) Låt A och B vara två händelser sådana att $P(A) = 0.40$, $P(A \cup B) = 0.94$ och $P(B|A) = 0.9$. Är A och B oberoende? Motivera! (2p)

   (b) Beräkna $P(X < 3)$ om X är Poissonfördelad med väntevärde 1.5. (2p)

   (c) Den kontinuerliga stokastiska variabeln X är likformigt fördelad på $[0, 1]$. Låt $Y = \frac{1}{X}$ och bestäm täthetsfunktionen för Y. (3p)

   (d) De möjliga utfallen för en stokastisk variabel X är $\{0, 1, 2, 3\}$. Man vet att $P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 3) = 1/5$ samt $E(X) = 3/2$. Bestäm sannolikheterna $P(X = 1)$ och $P(X = 2)$. (3p)

2. Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{för } 0 \le x \le 1 \text{ och } 0 \le y \le x \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

   (a) Beräkna $P(X \le 0.5)$. (5p)

   (b) Beräkna $E(XY)$. (5p)

3. Man vill jämföra två material A och B med avseende på en viss kvalitetsvariabel vilken uppmäts med ett och samma mätinstrument. Låt X och Y vara resultatet av en mätning på material A respektive B. X antas vara $N(\mu_1, 0.6)$ och Y antas vara $N(\mu_2, 0.6)$.

   (a) Vid ett stickprov av storleken 5 på X har man observerat stickprovsmedelvärdet 12.1 och från ett stickprov av storleken 8 på Y har man observerat stickprovsmedelvärdet 13.5. Beräkna ett tvåsidigt konfidensintervall för $\mu_2 - \mu_1$ med konfidensgraden 99%. (5p)

   (b) Om man önskar ett tvåsidigt 99%-igt konfidensintervall för $\mu_2 - \mu_1$ vars längd är högst 0.4 hur stora stickprov måste då tas på X och Y (välj lika stora stickprov)? (5p)

Var god vänd!

4. Livslängden hos en elektronisk komponent kan antas ha täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, & \text{för } x > 0 \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

där $\lambda > 0$ är en parameter.

(a) Man har observerat livslängderna hos 4 komponenter och erhållit

$$1.28, 12.2, 3.15 \text{ och } 5.64.$$

Skatta λ med maximumlikelihood-metoden. (10p)

(b) Bestäm (uttryckt i λ) sannolikheten att en komponent fungerar vid tiden 10. (4p)

(c) En apparat innehåller två komponenter som är parallellkopplade. Detta innebär att apparten fungerar så länge någon av komponenterna fungerar. Bestäm (uttryckt i λ) sannolikheten att apparaten fungerar vid tiden 10, om livslängderna hos de två komponenterna kan antas vara oberoende stokastiska variabler med ovanstående täthetsfunktion. (4p)

(d) Använd ML-skattningen av λ i (a) och uppskatta den sökta sannolikheten i (c). (2p)

5. För att mäta en giftkoncentration i vatten används en mätutrustning som måste kalibreras. För kända giftkoncentrationer x_i observeras motsvarande analysresultat y_i:

x_i	2.3	2.8	3.0	3.4	3.5
y_i	2.4	2.6	2.7	3.2	3.1

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 3.0 \ ; \ \bar{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = 2.8 \ ; \ S_{xx} = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = 0.94$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{5}(y_i - \bar{y})^2 = 0.46 \ ; \ S_{xy} = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0.63$$

Modell: y_i är observation av $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5$ är oberoende och $N(0, \sigma)$.

(a) Skatta α och β. (4p)

För att förbättra skattningarna av α och β kan ytterligare mätningar göras. Man beslutar sig för att göra en ny analys i $\bar{x} = 3.0$, dvs för $x_6 = \bar{x} = 3.0$ görs en ny analys och man erhåller $y_6 = 2.9$.

(b) Skatta α och β med hjälp av alla 6 observationsparen. Förändras skattningarna? (8p)

(c) Beräkna skattningarnas varianser i (a) och (b) (uttryckta i σ^2). Är det någon skattning som förbättras genom den extra sjätte observationen? (8p)

6. På ett ställe används en glödlampa kontinuerligt. Så fort en glödlampa har gått sönder byts den alltså mot en ny. Varje gång en lampa byts dras en lampa av sort A eller sort B. I genomsnitt är det 60% A-lampor som används. A-lampornas livslängder kan antas vara $N(100, 10)$ medan B-lampornas livslängder är $N(80, 10)$ (båda livslängderna är i timmar).

Bestäm sannolikheten att man under tiden 300 timmar har behövt göra minst 4 lampbyten. (20p)

Ledning: För att behöva göra minst 4 lampbyten under tiden 300 timmar skall summan av livslängderna för de 4 första lamporna vara mindre än 300 timmar.

Lycka till!