Y

Lösningar till FMS012
9/1, 2007

1)

a) $P((A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C))$

$= 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}44$

b) $E(X) = (c-1)\,1/6 + c \cdot \frac{1}{3} + (c+1) \cdot 1/2 = c + \frac{1}{3}$

$E(X) = 0 \Rightarrow c = -1/3$

c) $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(1/X \le y) = P(X \ge 1/y)$

$= 1 - P(X \le 1/y) = 1 - 1/y \quad , y \ge 1$

$f_Y(y) = \begin{cases} 1/y^2 & , y \ge 1 \\ 0 & , \text{f.ö.} \end{cases}$

d) $P(\text{viss konserv väger} > 260\text{ g}) = 1 - \Phi\left(\frac{260-250}{10}\right)$

$\approx 0{,}16$

Y = antal konsv. av 5 med vikt > 260 g

$Y \in Bin(5, 0{,}16)$

$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y \le 1) = 0{,}18$

2)

X = Antalet defekta enheter från maskin 1

Y = 〃 〃 〃 〃 〃 2

$X \in Bin(1000, p_1)$, $Y \in Bin(1000, p_2)$

$$\frac{Y}{1000} - \frac{X}{1000} \underset{\approx}{\in} N\left(p_2 - p_1, \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{1000} + \frac{p_1(1-p_1)}{1000}}\right)$$

$$I_{p_2 - p_1} = \frac{20-11}{1000} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98 + 0{,}011 \cdot 0{,}989}{1000}} \approx 95\%$$

$$= 0{,}009 \pm 0{,}0108$$

Eftersom intervallet innehåller $p_2 - p_1 = 0$ kan man ej förkasta hypotesen att defektsannolikheterna är lika på 5%-nivån.

Alternativ lösning! $H_0 : p_1 = p_2$
$H_1 : p_1 \neq p_2$

Under H_0 är $p^*_{obs} = \frac{11+20}{2000} = 0{,}0155$

$$d = \sqrt{p^*_{obs}(1 - p^*_{obs})\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}\right)} = 5{,}524 \cdot 10^{-3}$$

3,

$$U = \frac{0{,}02 - 0{,}011}{5.524 \cdot 10^{-3}} = \frac{9}{5.524} = 1{,}629 < 1{,}96$$

$\therefore$ H_0 kan ej förkastas

3) Låt X = resistansen hos ett motstånd

$X \in N(\mu, \sigma)$

$X_1, \ldots, X_6$ är ett stickprov på X.

$$s^2 = \frac{1}{5} \sum (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \frac{5S^2}{\sigma^2} \in \chi^2(5)$$

$$P\left(\frac{5S^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{0,99}(5)\right) = 0{,}99$$

$\therefore$ 99% uppåt begränsat konf. int för σ:

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{5S^2}{\chi^2_{0,99}(5)}} \quad , \quad \chi^2_{0,99}(5) = 0{,}554$$

$$\bar{x} = 10{,}1 \quad , \quad s^2 = \frac{0{,}46}{5} = 0{,}092$$

Det obs. konf intervallet blir

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{0{,}46}{0{,}554}} = 0{,}911 \qquad (99\%)$$

4) a) Låt X = Antal anrop mellan 8.00 och 9.00

$X \in Po(6)$

$P(X>8) = 1 - P(X \le 8) = 1 - \sum_{k=0}^{8} \frac{6^k}{k!} e^{-6} = 1 - 0,8472 = 0,1528$

b) Låt Y = Antal anrop mellan 15.00 och 16.00

och $A = \{X > 8\}$, $B = \{Y > 8\}$

P(minst ett av passen får mer än 8 anrop) $= P(A \cup B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$
$0,1527 + 0,1527 - (0,1527)^2 = 0,28$

Alt. lösning $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A^c)P(B^c) = 1 - 0,8472^2 = 0,28$

5) a) $\beta_1^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 1,0601$

$Q_0 = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = 13643,612$

$S = \sigma^* = \sqrt{\frac{Q_0}{10-2}} = 41,2971$

95% konf. int. för β_1

$I_{\beta_1} = 1,0601 \mp 2,31 \cdot 0,04522 = (1,0601 \mp 0,1045)$

$H_0: \beta_1 = 1$, $1 \in I_{\beta_1}$

$\therefore$ H_0 kan ej förkastas

b) $H_0: \beta_0 = 0$

95% konf int för β_0 är

$I_{\beta_0} = (-127,34 \mp 2,31 \cdot 80,28)$

$0 \in I_{\beta_0}$ ∴ H_0 kan ej förkastas

c) $x_0 = 1900 \Rightarrow \mu_0^* = 1886,9309$

$d(\mu_0^*) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} = 41,2971\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(1900 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$

$= 14,6847$

$I_{\mu_0} = 1886,9309 \mp 2,31 \cdot 14,6847$

$= (1853,0678 \ , \ 1920,7941)$ (95%)

6) Låt

X_i = Mängden vetemjöl kund nr i köper, $i = 1, \ldots, 50$

$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ = Totala mängden mjöl som 50 kund köper

6/

Enligt CGS är $Y \underset{\sim}{\in} N(E(Y), D(Y))$

$$E(X_i) = \int_0^\infty x \cdot xe^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^\infty + 2\underbrace{\int xe^{-x}\,dx}_{=1} = 2$$

$$\Rightarrow E(Y) = 50 \cdot 2 = 100$$

$$E(X_i^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot xe^{-x}\,dx = \underbrace{\left[-x^3 e^{-x}\right]_0^\infty}_{=0} + 3\underbrace{\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx}_{=2}$$

$$= 6 \quad \Rightarrow V(X_i) = 6 - 2^2 = 2$$

$$\Rightarrow V(Y) = 50 \cdot 2 = 100 \Rightarrow D(Y) = 10$$

$$\therefore \; Y \underset{\sim}{\in} N(100, 10)$$

Bestäm c så att $P(Y \leq c) \geq 0{,}99$

$$\therefore \; 0{,}99 \leq P(Y \leq c) = \Phi\left(\frac{c-100}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{c-100}{10} \geq 2{,}33 \Rightarrow c \geq 123{,}3$$