Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds tekniska högskola
Lunds universitet

Tentamen: 2007–01–09 kl 8^{00}–13^{00}
FMS 012 — Matematisk statistik för I, 6 p
FMS 012 — Matematisk statistik för FPiN, 6 p
FMS 012 — Matematisk statistik för CED, 6 p
MAS233 — Matematisk statistik för fysiker, 6 p

Korrekt, väl motiverad lösning på uppgift 1–3 ger 10 poäng vardera medan uppgift 4–6 ger 20 poäng vardera. Totalt kan man få 90 poäng. Gränsen för godkänd är 40 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, Formelsamling i matematisk statistik AK 2006-12-06 eller senare, samt miniräknare.

Resultatet anslås *senast* tisdagen den 23 januari i matematikhusets entréhall.
Lösningar delas ut i samband med visningen.

---

1. (a) Låt A, B och C vara tre oberoende händelser sådana att $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ och $P(C) = 0.5$. Beräkna sannolikheten att exakt en av händelserna inträffar. (2p)

   (b) En diskret stokastisk variabel antar värden i punkterna $c - 1, c$ och $c + 1$ med sannolikheterna $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ och $\frac{1}{2}$. Bestäm c så att väntevärdet blir lika med 0. (2p)

   (c) Antag att X är likformigt fördelad på intervallet $(0, 1)$. Bestäm täthetsfunktionen för $Y = \frac{1}{X}$. (2p)

   (d) Vikten i gram av en viss typ av konserver antas vara $N(250, 10)$. Beräkna sannolikheten att av fem sådana konserver åtminstone två väger mer än 260 gram. (4p)

2. Vid tillverkning av en viss sorts enheter kan det uppstå defekter. Man har två maskiner för tillverkningen och önskar undersöka deras defektsannolikheter. Man tillverkar därför 1000 enheter med varje maskin och observerar härvid 11 resp 20 defekta enheter. Testa på nivån 5% att maskinerna har lika defektsannolikheter. (10p)

3. Resistansen hos tillverkade motstånd kan antas vara normalfördelad med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2. Man mäter resistansen hos 6 motstånd och erhåller:

   $$9.8, 10.6, 10.2, 10.2, 9.8, 10.0.$$

   Bestäm ett uppåt begränsat 99%-igt konfidensintervall för σ. (10p)

4. En institutionssekreterare har telefontid varje dag mellan kl 8.00-9.00 samt mellan kl 15.00-16.00. Telefonanropen under både morgon- och kvällspasset kan en viss dag antas inkomma enligt en Poissonprocess med intensiteten 1 anrop på 10 minuter.

   (a) Bestäm sannolikheten att sekreteraren denna dag får mer än 8 samtal under morgonpasset. (10p)

   (b) Bestäm sannolikheten att det denna dag under åtminstone ett av passen inkommer mer än 8 samtal. (10p)

Var god vänd!

5. För att bestämma blodflöden har man traditionellt använt en mycket noggrann men tidskrävande manuell metod. En ny metod baserad på sensorer och programvara har lanserats. I nedanstående data finns uppmätta blodföden från tio olika personer dels med den traditionella metoden dels med den nya metoden.

Person nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trad. metod (x)	1190	1455	1550	1730	1745	1770	1900	1920	1960	2295
Ny metod (y)	1115	1425	1515	1795	1715	1710	1830	1920	1970	2300

Som modell ansätts enkel linjär regression, dvs:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\,;\; i = 1, \ldots, 10$$

där man antar att ε_i är $N(0, \sigma)$-fördelade och oberoende vid olika mätningar.

Nedanstående beräkningar gäller för modellen:

$$\bar{x} = 1751.5; \bar{y} = 1729.5; \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 833952.5; \sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2 = 950922.5$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 884107.5.$$

(a) Eftersom den traditionella metoden är mycket noggrann kan man betrakta x_i-värdena som fixa. För att undersöka nogrannheten hos den nya metoden vill man pröva hypotesen $H_0 : \beta_1 = 1$ mot $H_1 : \beta_1 \neq 1$. Utför testet på 5%-nivån. (6p)

(b) Pröva på 5%-nivån hypotesen att den teoretiska regressionslinjen går genom origo. (6p)

(c) Konstruera ett 95% konfidensintervall för den nya metodens väntevärde om den traditionella metoden ger värdet 1900. (8p)

6. Vid en kvarn säljs vetemjöl i lösvikt. Mängden mjöl (kg) som en kund köper kan antas ha täthetsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Hur mycket vetemjöl bör kvarnen ha i lager, för att detta skall räcka till 50 kunder med sannolikheten minst 0.99 (approximativt)? (20p)

Lycka till!