Korrekt, väl motiverad lösning på uppgift 1–3 ger 10 poäng vardera medan uppgift 4–6 ger 20 poäng vardera. Totalt kan man få 90 poäng. Gränsen för godkänd är 40 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, Formelsamling i matematisk statistik AK 1996 eller senare, samt miniräknare.

Resultatet anslås senast torsdagen den 28 mars i matematikhusets entréhall.

1. (a) Låt $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ och $P(A \cup B) = 0.5$. Bestäm $P(A|B)$. (2p)

   (b) Tre bilmodeller (numrerade 1, 2 och 3) antas ha proportionerna 0.6, 0.3 respektive 0.1 av marknaden inom en viss kundgrupp. Alla tre modellerna har haft problem med att en krockkudde av misstag löses ut. Sannolikheten för att detta inträffar under en bils livslängd är $3 \cdot 10^{-5}$, $6 \cdot 10^{-5}$ respektive $20 \cdot 10^{-5}$ för de tre olika modellerna. Bestäm sannolikheten för att en bil där en krockkudde utlöses av misstag är av typ 1. (4p)

   (c) Låt den stokastiska variabeln X vara likformigt fördelad på intervallet (0,1). Bestäm täthetsfunktionen för $\sqrt{X}$. (4p)

2. Antag att vikten (i hg) av en för försäljning fångad kräfta är en s.v. X med täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \frac{1-x}{0.32}, \quad 0.2 \le x \le 1$$

   Vad är sannolikheten att 100 kräftor väger mindre än 4 kg? (Använd lämplig approximation.) (10p)

3. Två olika utrustningar I och II för kontroll av avgaser från bilar testades för att bestämma medelutsläppet under en timma av mängden kväveoxid. Tjugo bilar av samma årsmodell valdes ut för studien. Tio slumpmässigt utvalda bilar utrustades med utrustning I och de återstående med II. Därefter gjordes mätningar av utsläppen av mängden kväveoxid. Av tekniska skäl misstänker man att medelvärdet i mätserie I, μ_1, är större än medelvärdet i mätserie II, μ_2.

   (a) Använd nedanstående data för att på nivån 0.01 testa

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2,$$
$$H_1: \quad \mu_1 > \mu_2.$$

I	1.25	1.18	0.95	1.25	1.22	1.08	1.06	1.02	1.15	1.27
II	1.03	1.04	1.15	0.89	0.86	0.91	0.93	0.92	1.04	0.72

   Du får antaga att observationerna är oberoende och normalfördelade med känd varians $\sigma^2 = 0.02$. (6p)

   (b) Antag att den verkliga skillnaden $\mu_1 - \mu_2 = 0.2$. Bestäm sannolikheten att vi förkastar H_0 i detta fall. (4p)

4. De stokastiska variablerna X och Y har den simultana tätheten

$$\begin{cases} 5/4 - xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

   (a) Beräkna $C(X, Y)$. (10p)

   (b) Bestäm den betingade tätheten för Y givet $X = x$. (6p)

   (c) Är X och Y oberoende? Motivera varför eller varför inte. (4p)

Var god vänd!

5. Enligt Hookes lag är förlängningen y av en fjäder en linjär funktion av belastningen x. Vid konstruktionen av en våg har man använt sig av denna princip. För att kalibrera vågen mätte man förlängningen y av fjädern för var och en av 9 olika precisionsbestämda vikter x_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$. Följande värden erhölls:

x_i:	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i:	5.2	6.1	6.9	7.9	9.8	11.3	11.7	12.6	14.0

Man beräknade följande storheter.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 72, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 85.5, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 751.7, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 636, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 889.7$$

(a) Ansätt en enkel linjär regressionsmodell $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, där ε_i är oberoende observationer av $N(0, \sigma)$, och skatta α, β och σ. (6p)

(b) Antag att man för ett okänt värde på x, säg x_0, mätt motsvarande y-värde till 10.4. Gör ett 95% konfidensintervall för x_0. (8p)

(c) Egentligen borde regressionslinjen gå igenom origo. För att den skattade linjen skall göra det kan man använda modellen $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_i \in N(0, \sigma)$ (dvs $Y_i \in N(\beta x_i, \sigma)$). Härled MK-skattningen av β enligt den modellen. (6p)

6. Man har två oberoende stickprov: Stickprov 1 med 10 mätvärden $x_1, \ldots, x_{10}$ som kommer från en Poissonfördelning med väntevärde Θ och stickprov 2 med 30 mätvärden $y_1, \ldots y_{30}$ som kommer från en Poissonfördelning med väntevärde 3Θ.
För de två stickproven gäller att $\sum_{i=1}^{10} x_i = 13$, $\sum_{i=1}^{30} y_i = 93$.

a) Härled ML-skattningen, Θ^*_{ML} för Θ och visa att skattningen är väntevärdesriktig. Bestäm $V(\Theta^*_{ML})$. (7p)

b) Härled MK-skattningen, Θ^*_{MK} för Θ och visa att skattningen är väntevärdesriktig. Bestäm $V(\Theta^*_{MK})$. (7p)

c) Vilken av skattningarna är bäst? (6p)

Lycka till!