1. (a) Om $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$ så är A och B oberoende. Vidare har vi att

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B),$$

vilket ger $\mathsf{P}(A \cap B) = 0.4 + 0.2 - 0.52 = 0.08$.
Vi har $\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) = 0.4 \cdot 0.2 = 0.08 = \mathsf{P}(A \cap B)$. Vilket ger att A och B är oberoende händelser.

(b) $\rho(Z_1, Z_2) = \frac{\mathsf{C}(Z_1,Z_2)}{\mathsf{D}(Z_1)\mathsf{D}(Z_2)}$.
$\mathsf{V}(Z_i) = \mathsf{V}(X + Y_i) = \mathsf{V}(X) + \mathsf{V}(Y_i) + 2\mathsf{C}(X, Y_i) = 0.04^2 + 0.03^2 + 0$, eftersom X och Y_i är oberoende stokastiska variabler. $\mathsf{D}(Z_i) = \sqrt{\mathsf{V}(Z_i)} = 0.05$.
$\mathsf{C}(Z_1, Z_2) = \mathsf{C}(X + Y_1, X + Y_2) = \mathsf{C}(X, X) + \mathsf{C}(X, Y_2) + \mathsf{C}(Y_1, X) + \mathsf{C}(Y_1, Y_2) = \mathsf{V}(X) = 0.04^2$, eftersom X, Y_1 och Y_2 är oberoende stokastiska variabler.
$\rho(Z_1, Z_2) = \frac{0.04^2}{0.05^2} = 0.64$.

(c) Sätt upp fördelningsfunktionen för Y :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y \le y) = \mathsf{P}(-4lnX \le y) = \mathsf{P}(\ln X > -y/4) = \mathsf{P}(X > e^{-y/4}) \\ &= 1 - F_X(e^{-y/4}) = 1 - e^{-y/4},\ y > 0 \end{aligned}$$

I sista steget har vi använt att $F_X(x) = x$ om $0 \le x \le 1$ för en R(0,1)-fördelning. Vidare ser vi att Y exponentialfördelad med väntevärde 4.

2. Låt X vara antal felaktiga klinkers i partiet. Eftersom klinkers blir defekta oberoende av varandra gäller det att $X \in Bin(10000,\ 0.01)$. Eftersom $npq = 99 > 10$ är det tillåtet att normalapproximera så att $X \underset{\sim}{\in} N\left(100,\ \sqrt{99}\right)$.

$$\mathsf{P}(X \le 120) = \mathsf{P}\left(\frac{X - 100}{\sqrt{99}} \le \frac{120 - 100}{\sqrt{99}}\right) \approx \Phi(2.01) \approx 0.978.$$

3. Inför följande händelser A : Nolla tas emot, H_1 : Nolla skickas ut och H_2 : Etta skickas ut.
Använd Bayes sats.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A|H_1) &= \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{37}{49}, \\ \mathsf{P}(A|H_2) &= \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{49}, \\ \mathsf{P}(H_1|A) &= \frac{\mathsf{P}(A|H_1)\mathsf{P}(H_1)}{\mathsf{P}(A|H_1)\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(A|H_2)\mathsf{P}(H_2)} \\ &= \frac{\frac{37}{49} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{37}{49} \cdot \frac{2}{3} + \frac{12}{49} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{37}{43} \approx 0.86. \end{aligned}$$

4. (a) Testa

$$\begin{aligned} H_0 :&\ \mu_x - \mu_y = 0, \\ H_1 :&\ \mu_x - \mu_y > 0. \end{aligned}$$

Vi väljer att utföra hypotestestet genom att konstruera ett nedåt begränsat konfidensintervall för parametern $\mu_x - \mu_y$,

$$I_{\mu_x - \mu_y} = \left(\mu_x^* - \mu_y^* - \lambda_\alpha \mathsf{D}(\mu_x^* - \mu_y^*),\ \infty\right).$$

Här har vi

$$\begin{aligned}
\mu_x^* &= 23.2. \\
\mu_y^* &= 21.1. \\
\mathsf{V}(\mu_x^* - \mu_y^*) &= \sigma^2\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right). \\
\mathsf{D}(\mu_x^* - \mu_y^*) &= \sigma\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = 3.1623. \\
I_{\mu_x - \mu_y} &= (23.2 - 21.1 - \lambda_{0.05} \cdot 3.1623,\ \infty) = (-3.10,\ \infty)\,.
\end{aligned}$$

Eftersom punkten 0 tillhör intervallet kan man inte förkasta H_0 på nivån 0.05.

(b) H_0 förkastas på nivån 0.05 om $\frac{\mu_x^* - \mu_y^*}{\sigma\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}}} > \lambda_{0.05}$.

Styrkefunktionen

$$\begin{aligned}
h(\mu) &= \mathsf{P}(H_0 \text{ förkastas om } \mu \text{ är det korrekta väntevärdet}) \\
&= \mathsf{P}\left(\frac{\mu^*}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}} > \lambda_{0.05} || \mu\right) = \\
&= \mathsf{P}\left(\frac{\mu^* - \mu}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}} > \lambda_{0.05} - \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}}\right) = \\
&= 1 - \Phi\left(\lambda_{0.05} - \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}}\right).
\end{aligned}$$

Nu skall $h(2) > 0.5$. Detta ger

$$\begin{aligned}
1 - \Phi\left(\lambda_{0.05} - \frac{2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}}\right) &> 0.5 \\
\Phi\left(\lambda_{0.05} - \frac{2}{\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}}\right) &< 0.5
\end{aligned}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}
\lambda_{0.05} - \frac{2}{10\sqrt{\frac{2}{n}}} &< 0 \\
10\sqrt{\frac{2}{n}}\lambda_{0.05} &< 2 \\
\sqrt{n} &> 5\sqrt{2}\lambda_{0.05} \\
n &> 50\lambda_{0.05}^2 \approx 135.28
\end{aligned}$$

Ur detta följer att $n \geq 136$.

5. (a)

$$\begin{aligned}
\beta_1^* &= -0.4904. \\
\mathsf{V}(\beta_1^*) &= \sigma^2 0.3858. \\
I_{\beta_1} &= (\beta_1^* \pm t_{0.025}(6)d(\beta_1^*)) = (-0.718, -0.262).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(\alpha')^* &= \alpha^* - \beta_1^*\bar{x}_{.1} - \beta_2^*\bar{x}_{.2} = 5.4975.\\
\mathsf{V}((\alpha')^*) &= \mathsf{V}(\alpha^*) + \bar{x}_{.1}^2\mathsf{V}(\beta_1^*) + \bar{x}_{.2}^2\mathsf{V}(\beta_2^*) + 2\bar{x}_{.1}\bar{x}_{.2}\mathsf{C}(\beta_1^*, \beta_2^*)\\
&= \sigma^2(0.1111 + (2.083)^2 0.3858 + (0.253)^2 0.4877 + 2 \cdot 2.083 \cdot 0.253(-0.3999))\\
&= \sigma^2 1.3948.\\
(\sigma^2)^* &= \frac{0.13467}{6} = 0.02245.\\
d((\alpha')^*) &= \sqrt{0.03131} = 0.1770\\
I_{\alpha'} &= (\alpha')^* \pm t_{0.025}(6)d((\alpha')^*) = (5.064, 5.931).
\end{aligned}$$

(c) Vi söker ett nedåt begränsat konfidensintervall för $\mathsf{E}(Y') = m'$, där eftersom ($x' = 1$)

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\ln(Y')) &= \alpha' + \beta_1 = \alpha - \beta_1\bar{x}_{.1} - \beta_2\bar{x}_{.2} + \beta_1\\
&= \alpha + (1 - \bar{x}_{.1})\beta_1 - \bar{x}_{.2}\beta_2.
\end{aligned}$$

Alternativt sätter vi upp följande hypoteser:

$$\begin{aligned}
H_0 : m' &= 120,\\
H_1 : m' &> 120.
\end{aligned}$$

Låt $m = \mathsf{E}(\ln(Y'))$.

$$\begin{aligned}
m^* &= (\alpha')^* + \beta_1^* = 5.0073\\
\mathsf{V}(m^*) &= \mathsf{V}(\alpha^*) + (1 - \bar{x}_{.1})^2\mathsf{V}(\beta_1^*) + \bar{x}_{.2}^2\mathsf{V}(\beta_2^*) - 2(1 - \bar{x}_{.1})\bar{x}_{.2}\mathsf{C}(\beta_1^*, \beta_2^*)\\
&= (\text{på samma sätt som ovan}) = \sigma^2 0.3756.\\
I_m &= (m^* - t_{0.05}(6)d(m^*), \infty) = (5.0073 - 1.94\sqrt{0.00843}, \infty)\\
I_{m'} &= (e^{I_m}) = (125.071, \infty).
\end{aligned}$$

Eftersom 120 inte tillhör $I_{m'}$ kan vi förkasta H_0 på nivån 5%.

6. (a)

$$\begin{aligned}
L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \vartheta) = \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^{\sum_{i=1}^n |x_i|} (1 - \vartheta)^{n - \sum_{i=1}^n |x_i|}.\\
l(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) &= \ln(L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n))\\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ln\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)\ln(1 - \vartheta).\\
\frac{\mathrm{d}l(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} &= \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\vartheta} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^n |x_i|\right)}{1 - \vartheta}.
\end{aligned}$$

Vi sätter nu derivatan ligger med noll och löser för ϑ:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\vartheta} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^n |x_i|\right)}{1 - \vartheta}\\
(1 - \vartheta)\sum_{i=1}^{n} |x_i| &= \vartheta(n - \sum_{i=1}^{n} |x_i|)\\
\sum_{i=1}^{n} |x_i| &= n\vartheta.
\end{aligned}$$

Detta ger ML-skattningen $\vartheta^* = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{n}$.

(b)

$$\mathsf{E}(|X|) = \left(1 \cdot \frac{\vartheta}{2} + 0 \cdot (1 - \vartheta) + 1 \cdot \frac{\vartheta}{2}\right) = \vartheta.$$

Eftersom X bara kan anta värdena $-1, 0, 1$ har vi att $|X| = |X|^2$ för alla möjliga utfall vilket gör att $\mathsf{E}(|X|^2) = \mathsf{E}(|X|)$. För variansen gäller att $\mathsf{V}(|X|) = \mathsf{E}(|X|^2) - (\mathsf{E}(|X|))^2 = \mathsf{E}(|X|) - (\mathsf{E}(|X|))^2 = \vartheta - \vartheta^2 = \vartheta(1-\vartheta)$.

(c)

$$\mathsf{E}(\vartheta^*) = \mathsf{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{n}\right) = \frac{n\mathsf{E}(|X|)}{n} = \mathsf{E}(|X|)$$

Från (b) fås att $\mathsf{E}(|X|) = \vartheta$

Skattningen är alltså väntevärdesriktig.

(d)

$$\begin{aligned}\mathsf{V}(\vartheta^*) &= \mathsf{V}\left(\frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathsf{V}(X_i)}{n^2} \\ &= \frac{n}{n^2}\mathsf{V}(|X|) = \frac{\mathsf{V}(|X|)}{n}\end{aligned}$$

Från (b) fås att $\mathsf{V}(|X|) = \vartheta(1-\vartheta)$ vilket ger att

$$\mathsf{V}(\vartheta^*) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}.$$