Korrekt, väl motiverad lösning på uppgift 1–3 ger 10 poäng vardera medan uppgift 4–6 ger 20 poäng vardera. Totalt kan man få 90 poäng. Gränsen för godkänd är 40 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, Formelsamling i matematisk statistik AK 1996 eller senare, samt miniräknare.

Resultatet anslås senast fredagen den 23 mars i matematikhusets entréhall.

1. Antag att sommarvädret varierar enligt en Markovkedja med tillstånden E_1: ”soligt”, E_2: ”mulet” och E_3: ”regnigt”, med övergångsmatris

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

   (a) Du sitter på sommarjobbet en solig torsdag och svettas. Om det inte regnar på lördag sticker jag till stranden, tänker du. Vad är sannolikheten att du åker till stranden på lördagen? Förutsätt att det bara beror på vädret. (5p)

   (b) Vad blir den stationära fördelningen för vädret? (5p)

2. Andelen felaktiga enheter i en tillverkningsprocess var tidigare 3 % men man hoppas att andelen minskat sedan man justerat proceduren. I ett slumpmässigt stickprov om 1000 enheter tillverkade efter justeringen var 25 felaktiga. Är detta en signifikant minskning av andelen felaktiga? (10p)

3. En geokemist undersöker halterna av järn (mg/g) i skogsmark och gräver därför 10 st gropar. Hon är speciellt intresserad att undersöka om det finns skillnader i järnhalt mellan olika nivåer i groparna och tar därför från varje grop ett prov på A-nivå (nära ytan och därmed påverkat av mänskliga aktiviteter) och ett prov på C-nivå (ca 1 meter djupt och troligen inte så mycket påverkat av människan). Området av skogsmark är av mycket heterogen karaktär, dvs det är troligt att genomsnittlig järnhalt varierar mellan olika gropar.

Grop nr:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nivå A:	19.15	23.35	20.10	16.70	31.85	17.70	22.77	21.71	34.06	18.71
Nivå C:	21.96	27.70	22.93	19.02	32.26	17.35	27.39	25.43	33.43	18.14

   Ange en lämplig modell baserad på normalfördelning som beskriver data och undersök, genom att göra ett hypotestest eller genom att dra slutsatser från ett konfidensintervall, om det finns skillnader i genomsnittlig järnhalt mellan A- och C-nivåer i groparna. (10p)

4. Vid en fabrik tillverkas lampor av tre olika kvalitéer, lågpris (L) normalpris (N) och extra lång lystid (E). På grund av ett misstag vid paketeringen har lamporna hamnat i likadana kartonger, dessutom är lamporna till förväxling lika till utseendet. Vi vet att andelarna av L, N och E lampor är 40%, 35% och 25%. Antag att lamporna har exponentialfördelade lystider med väntevärdena 400, 700 och 1000 timmar för L, N respektive E lampor.

   (a) Beräkna täthetsfunktionen för en slumpmässigt vald lampas lystid. (6p)

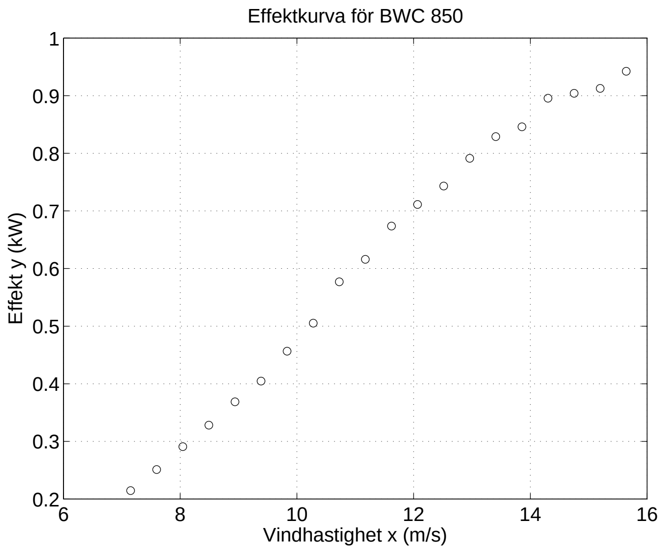
Var god vänd!

(b) Vi testar en slumpmässigt vald lampa och finner att den lyste i 600 timmar. Vad är den betingade sannolikheten att den är en L, N respektive E lampa? (6p)

(c) Vi mäter på ytterligare en lampa och finner att den fortfarande är hel efter 600 timmar. Antag att lampan kommer från den sort som har högst betingad sannolikhet givet att den lyser minst 600 timmar. Vad är sannolikheten att återstående lystiden är mer än 500 timmar givet detta antagande? (8p)

5. Vid en test av det småskaliga vindkraftverket BWC 850 (endast 2.44 m i diameter) uppmättes nedanstående effekt, y i (kW), som funktion av vindhastighet x (m/s) (riktiga data). Mätningarna gjordes vid 15° C vid havsnivå.

x (m/s)	7.15	7.60	8.04	8.49	8.94	9.39	9.83	10.28	10.73	11.17
y (kW)	0.21	0.25	0.29	0.33	0.37	0.40	0.46	0.51	0.58	0.62
x (m/s)	11.62	12.07	12.51	12.96	13.41	13.86	14.30	14.75	15.20	15.64
y (kW)	0.67	0.71	0.74	0.79	0.83	0.85	0.90	0.90	0.91	0.94



Efter ett noggrant övervägande finner vi att det blir lättare att modellera effekten efter en (monoton) transformation av mätningarna enligt

$$z_i = \ln\left(\frac{y_i}{1-y_i}\right),\ i = 1, 2, \ \cdots\ , 20.$$

Vi förslår nu modellen $z_i = \alpha + x_i\beta + e_i$ där $\mathrm{e}_i \in N(0, \sigma)$. Vi beräknar följande summor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 227.9, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i = 12.55, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = 205.7, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2731, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 37.57.$$

(a) Skatta parametrarna i modellen (α, β och σ). (8p)

(b) Gör ett 99% intervall för uppmätt transformerad effekt (Z) då det blåser 11 m/s. (8p)

(c) Gör ett 99% intervall för uppmätt effekt (Y) då det blåser 11 m/s. (4p)

6. Man har observationerna x_1=11.045 x_2=10.474 och x_3=13.593 av X där

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9!\theta^{10}} x^9 e^{-x/\theta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases},$$

med $\theta > 0$.

(a) Bestäm ML-skattningen av θ. (8p)

(b) Beräkna skattningens medelfel. (4p)

(c) Inför lämpliga approximationer och testa på nivån 5% om $\theta > 1$. (8p)

Lycka till!