Korrekt, väl motiverad lösning på uppgift 1–3 ger 10 poäng vardera medan uppgift 4–6 ger 20 poäng vardera. Totalt kan man få 90 poäng. Gränsen för godkänd är 40 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

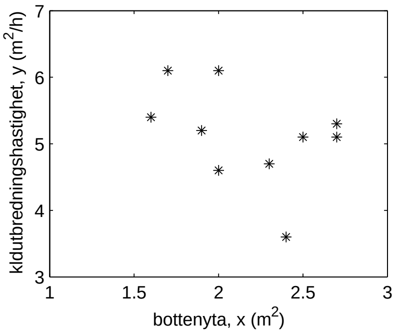
Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, Formelsamling i matematisk statistik AK 1996 eller senare, samt miniräknare.

Resultatet anslås senast torsdagen den 22 december i matematikhusets entréhall.

1. Muminfamiljen har flyttat till en öde ö längst ut i skärgården (Tove Jansson: *Pappan och havet*). Varje dag behöver de en oberoende $N(3,\ 0.5)$-fördelad mängd fotogen (enhet: dl).
   (a) Beräkna fördelningen för den mängd fotogen de kommer att behöva under tre veckor. (3p)
   (b) Familjen har med sig fotogen i en stor dunk. Muminpappan har räknat ut att sannolikheten att dunken räcker i mer än tre veckor är 0.95. Hur mycket rymmer dunken? (4p)
   (c) I själva verket har Lilla My, utan mumintrollens vetskap, först använt 6 dl för att utrota pissmyror. Hur stor är egentligen sannolikheten att dunken räcker i mer än tre veckor? (3p)

2. Det stryker omkring mårror i Ensliga bergen. Mårror är kalla och ju ensammare en mårra känner sig desto snabbare sprider sig kölden ut från henne. Hemulen (som har tröttnat på att samla frimärken och nu samlar på mårror istället) misstänker att det finns ett samband mellan en mårras storlek (mätt i hennes bottenyta x m^2) och hur ensam hon känner sig (mätt i köldutbredningshastighet i marken y m^2/h). Hemulen har samlat in följande material från några slumpmässigt valda mårror vid olika tillfällen: (10p)

mårra (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
bottenyta (x_i)	2.7	2.0	2.7	2.4	2.3	1.7	1.6	1.9	2.0	2.5
köldutbredningshastighet (y_i)	5.1	6.1	5.3	3.6	4.7	6.1	5.4	5.2	4.6	5.1



Han har dessutom räknat ut

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2 &= 1.416,\\ \sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) &= -1.046,\\ \sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2 &= 4.796.\end{aligned}$$

Testa, på något lämpligt sätt, om det finns ett signifikant linjärt samband mellan köldutbredning och storlek hos mårror. Ange tydligt modell, hypoteser och vald signifikansnivå.

3. Det lilla djuret Sniff har hittat en stokastisk variabel X. Variabeln är $R(-1,\ 1)$-fördelad och Sniff är intresserad av hur stor dess kvadrat kan tänkas bli. Sätt därför $Y = X^2$ och beräkna $\mathsf{E}(Y)$ och $\mathsf{V}(Y)$, dels exakt och dels med hjälp av Gaussapproximation. Förklara också för Sniff, gärna med hjälp av en klargörande figur, varför approximationen är så dålig. (10p)

4. Hatifnattar växer upp ur marken (Tove Jansson: *Farlig midsommar*) enligt en poissonprocess med intensitet λ hatifnattar per dm^2.
   (a) Antag att $\lambda = 1$ (dm^{-2}). Hur stor är (approximativt) sannolikheten att det växer upp mer än 120 hatifnattar på en gräsmatta som är 1 m^2 stor? (5p)

4. (b) Snusmumriken, Parkvakten och Parktanten har räknat antalet hatifnattar på varsin del av gräsmattan och fått resultatet till höger: (15p)

	yta (t_i)	hatifnattar (x_i)
Snusmumriken	$5\,\mathrm{dm}^2$	4
Parkvakten	$100\,\mathrm{dm}^2$	91
Parktanten	$50\,\mathrm{dm}^2$	51

Parkvakten vill skatta hatifnattintensiteten med $\lambda^*_{\mathrm{Pv}} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{91}{100} + \frac{51}{50}\right) = 0.91$ medan Snusmumriken anser att $\lambda^*_{\mathrm{Sm}} = \frac{4+91+51}{5+100+50} \approx 0.94$ är bättre. Parktanten, å sin sida, tycker att Snusmumrikens mätvärde är så osäkert att det inte bör tas med och föreslår istället $\lambda^*_{\mathrm{Pt}} = \frac{91+51}{100+50} \approx 0.95$ som skattning. Beräkna de tre olika skattningarnas väntevärden och varianser och tala om vilken skattningsmetod som är bäst respektive sämst.

5. Filifjonkan oroar sig bl.a. för att mängden hallonsylt i hennes rulltårta skall vara för liten. För att vara helt perfekt skall mängden vara minst 1 tsk per skiva. Om den är mindre blir skivorna för torra och Filifjonkan får skämmas ögonen ur sig (anser hon).

   (a) Filifjonkan har skrapat ut hallonsylten ur tre oberoende rulltårtsskivor och fått att de innehöll 0.96, 0.84 respektive 0.80 tsk hallonsylt. Vilka slutsatser ska hon dra om hon vill uttala sig med en signifikansnivå på 0.05? Använd ett lämpligt test och ange hypoteser och slutsatser. Man kan anta att mängden hallonsylt i en rulltårtsskiva är normalfördelad. (10p)

   (b) Gafsan påpekar det slösaktiga med att undersöka tre skivor och tycker det räcker med två. Filifjonkan oroar sig då för hur det kommer att påverka testets styrka. Hon antar, efter att noga ha studerat gamla mätningar, att standardavvikelsen för mängden hallonsylt i en rulltårtsskiva kan anses vara 0.04 tsk. Antag att Filifjonkan har som mål att med minst sannolikheten 0.90 upptäcka att hallonsyltmängden understiger 1 tsk då hon gör ett test på signifikansnivån 0.05. För vilka värden på den verkliga hallonsyltmängden μ tsk är detta uppfyllt då man endast får undersöka två skivor? (10p)

6. Mårror förekommer i olika storlekar. En slumpmässigt vald mårra har bottenytan X (m^2). När en mårra sätter sig ner på marken vissnar allt under henne. Dessutom vissnar allt i en växande cirkel kring henne. Köldutbredningshastigheten, Y (m^2/h), beror på mårrans humör och är konstant under den tid hon sitter ner. Tiden hon sitter ner, T (h), beror på yttre omständigheter och är oberoende av både hennes storlek och humör. Den vissna yta, U (m^2), som lämnas av en mårra ges alltså av sambandet

$$U = X + YT.$$

Om en mårra sitter och kyler ner ett ställe i mer än en timme blir marken djupfryst och inget kan växa där sedan. Den area som blir djupfryst när en mårra har satt sig ner ges alltså av den stokastiska variabeln A (m^2):

$$A = \begin{cases} 0 & \text{om } T \leq 1, \\ X + Y(T-1) & \text{om } T > 1. \end{cases}$$

Vi antar att $\mathsf{E}(X) = 2\,\mathrm{m}^2$, $\mathsf{E}(Y) = 5\,\mathrm{m}^2/\mathrm{h}$, att T är exponentialfördelad med $\mathsf{E}(T) = 1$ h, och att X, Y och T är oberoende av varandra.

   (a) Beräkna väntevärdet för den vissna yta U som lämnas av en mårra. (3p)

   (b) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald mårra sitter ner i mer än en timme, dvs $\mathsf{P}(T > 1)$. (4p)

   (c) (*Forts.*) Beräkna den betingade fördelningen för den tid en mårra sitter ner, givet att hon sitter ner i mer än en timme, samt dess väntevärde, dvs $f_{T|T>1}(t)$ och $\mathsf{E}(T \mid T > 1)$. (6p)

   (d) (*Forts.*) Beräkna det betingade väntevärdet för den djupfrysta ytan A, givet att mårran suttit ner i mer än en timme, dvs $\mathsf{E}(A \mid T > 1)$. (3p)

   (e) (*Forts.*) Beräkna väntevärdet av A, dvs arean av den yta som kan förväntas bli djupfryst när en mårra sätter sig ner. (4p)

Lycka till!