1. (a) Man kan ganska lätt inse att B kan byggas upp av de oförenliga händelserna $A \cap B$ och $A^* \cap B$. Vi får alltså $P(B) = P(A \cap B) + P(A^* \cap B) = 0.8$. Då fås den sökta sannolikheten direkt ur definitionen av betingad sannolikhet

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.8} = 0.375$$

Inser man inte det kan $P(A \mid B)$ t.ex. lösas ur ekvationessystemet

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) \\ P(A^* \cap B) = P(A^* \mid B)P(B) = (1 - P(A \mid B))P(B). \end{cases}$$

(b) Sannolikhetsfunktionen fås ur fördelningsfunktionen med $p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1)$. Funktionsvärdena för de k där $p_X(k) > 0$ blir

$$\begin{aligned} p_X(1) &= F_X(1) - F_X(0) = 0.1 \\ p_X(2) &= 0.3 - 0.1 = 0.2 \\ p_X(3) &= 0.4 \\ p_X(4) &= 0.1 \\ p_X(5) &= 0.2. \end{aligned}$$

(c) Startfördelningen är alltså $p_0 = [1 \quad 0]$. Följande tisdags och onsdags fördelningar blir då

$$p_1 = p_0 P = [1 \quad 0] \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = [0.6 \quad 0.4]$$

$$p_2 = p_1 P = [0.6 \quad 0.4] \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = [0.44 \quad 0.56]$$

Den sökta sannolikheten är alltså 0.56.

2. Om vi låter X vara antalet vänsterben så är $x = 256$ en observation av $X \in Bin(n, p)$ där $n = 493$. p kan skattas med $p^* = x/n = 256/493 = 0.5193$ som är en observation av X/n. Eftersom $np^*(1 - p^*) = 123.1$ klart överstiger tumregeln 10 så är X och därmed p^* approximativt normalfördelade. För en binomialfördelning X är $V(X) = np(1 - p)$. För p^* blir då variansen, standardavvikelsen och medelfelet

$$\begin{aligned} V(p^*) &= V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}, \\ D(p^*) &= \sqrt{V(p^*)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \\ d(p^*) &= \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5193 \cdot (1 - 0.5193)}{493}} \approx 0.0225. \end{aligned}$$

Ett approximativt 95% konfidensintervall för p fås till

$$I_p = p^* \pm \lambda_{\alpha/2} d(p^*) = 0.5193 \pm 1.96 \cdot 0.0225 = [0.4752, 0.5634] \approx [0.48, 0.56].$$

3. Vi börjar med att rita definitionsområdet för den simultana tätheten och konstaterar att den är > 0 i den triangel som begränsas av linjerna $y = 0$ (x-axeln), $y = x$ och $x = 1$. För att bestämma det betingade väntevärdet behöver vi först marginalfördelningen för Y och den betingade täthetsfunktionen för X givet att

$Y = y$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = 8y\int_y^1 x\,dx = 8y\left[\frac{y^2}{2}\right]_y^1 = 4y(1-y^2),\ 0 \le y \le 1,$$

$$f_{X|Y=y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2},\ y \le x \le 1,$$

$$E(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x \mid y)\,dx = \int_y^1 \frac{2x^2}{1-y^2}\,dx = \frac{2}{1-y^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_y^1 = \frac{2(1-y^3)}{3(1-y^2)},\ 0 \le y < 1.$$

4. (a) Modell: y_i är observationer av $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, där ε_i är oberoende och $N(0,\sigma)$-fördelade. I uppgiften är S_{xx}, S_{yy} och S_{xy} uträknade. Vi behöver komplettera med $\bar{x} = 14.26$ och $\bar{y} = 85.559$. Parametrarna skattas med

$$\beta^* = = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 3.413$$
$$\alpha^* = \bar{y} - \beta^*\bar{x} = 85.559 - 3.413 \cdot 14.26 = 36.8896$$
$$\sigma^* = s = \sqrt{\frac{1}{15-2}(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}})} = 9.60$$

(b) Då temperaturskillnaden ökar en grad ökar energiförbrukningen med β. Ett 95% konfidensintervall för β fås genom

$$I_\beta = \beta^* \pm t_{a/2}(n-2)\,d\beta^*) = \beta^* \pm t_{0.025}(13)\frac{\sigma^*}{\sqrt{S_{xx}}}) = (0.87,\ 5.95)$$

(c) Temperaturskillnaden är $x_0 = 21.8 - 11.5 = 10.3$. Gör ett 95% konfidensintervall för predikterad energiförbrukning vid denna temperaturskillnad, dvs

$$I_{Y(x_0)} = \alpha^* + 10.3\beta^* \pm t_{0.025}(13)\sigma^*\sqrt{1 + \frac{1}{15} + \frac{(10.3-\bar{x})^2}{S_{xx}}}) = (48.4,\ 95.7)$$

5. (a) Vi vill altså testa

$$H_0 : \mu_x - \mu_y = 0,$$
$$H_1 : \mu_x - \mu_y > 0.$$

Vi väljer att utföra hypotestestet genom att konstruera ett nedåt begränsat konfidensintervall för parametern $\mu_x - \mu_y$,

$$I_{\mu_x-\mu_y} = \left(\mu_x^* - \mu_y^* - \lambda_\alpha D(\mu_x^* - \mu_y^*),\ \infty\right).$$

Här har vi

$$\mu_x^* = 23.2.$$
$$\mu_y^* = 21.1.$$
$$V(\mu_x^* - \mu_y^*) = \sigma^2(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}).$$
$$D(\mu_x^* - \mu_y^*) = \sigma\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = 3.1623.$$
$$I_{\mu_x-\mu_y} = (23.2 - 21.1 - \lambda_{0.05} \cdot 3.1623,\ \infty) = (-3.10,\ \infty).$$

Efterson punkten 0 täcks av intervallet kan man inte förkasta H_0 på nivån 0.05.

(b) H_0 förkastas på nivån 0.05 om $\frac{\mu_x^* - \mu_y^*}{\sigma\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}}} > \lambda_{0.05}$.

Styrkefunktionen

$$\begin{aligned}
h(\mu) &= P(H_0 \text{ förkastas om } \mu \text{ är det korrekta väntevärdet}) \\
&= P(\frac{\mu^*}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}} > \lambda_{0.05}||\mu) = \\
&= P(\frac{\mu^*-\mu}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}} > \lambda_{0.05} - \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}}) = \\
&= 1 - \Phi(\lambda_{0.05} - \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}}).
\end{aligned}$$

Nu skall $h(2) > 0.5$. Detta ger

$$1 - \Phi(\lambda_{0.05} - \frac{2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}}) > 0.5,$$

och $\lambda_{0.05} - \frac{2}{10\sqrt{\frac{2}{n}}} < 0$. Ur detta följer att $n > 136$.

6. Vi har n oberoende observationer, $x_1, \ldots, x_n$ av X med $f_X(x) = (\theta+1)x^\theta,\ 0 < x < 1$, där parametern $\theta > -1$.

(a) ML-skattnigen av θ fås som det θ som maximerar $L(\theta)$ eller $\ln L(\theta)$ som är lite enklare att maximera.

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n (\theta+1)x_i^\theta = (\theta+1)^n \prod_{i=1}^n x_i^\theta \\
\ln L(\theta) &= n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^n \ln x_i \\
\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} &= \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad \Longrightarrow \\
\theta &= -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} = \theta^*_{ML}
\end{aligned}$$

Detta θ maximerar L (andraderivatan av $\ln L$ är $-n/(\theta+1)^2 < 0$) så det är ML-skattningen av θ.

(b) Väntevärdet för logaritmen av en observation X_i, eller kalla den för enkelhets skull X (de har ju samma väntevärde), blir

$$\begin{aligned}
E(\ln X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln(x) f_X(x)\,dx = \int_0^1 \ln(x)\cdot(\theta+1)x^\theta\,dx = \Big[\ln(x)\cdot x^{\theta+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot x^{\theta+1}\,dx = \\
&= 0 - \int_0^1 x^\theta\,dx = -\left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{-1}{\theta+1}.
\end{aligned}$$

Normalt behöver man alltså inte först ta fram fördelningen för $\ln X$ för att beräkna väntevärdet. Men i just detta fall råkar $-\ln X$ ha en välbekant fördelning, så vi kan prova den metoden också. Sätt $Y = -\ln X$. Vi ser att då $0 < X < 1$ kommer Y att anta värden mellan 0 och ∞. Dess fördelning blir

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(-\ln X \le y) = P(X \le e^{-y}) = F_X(e^{-y}). \\
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(e^{-y}) = e^{-y}f_X(e^{-y}) = e^{-y}(\theta+1)e^{-\theta y} = (\theta+1)e^{-y(\theta+1)},\ y \ge 0.
\end{aligned}$$

Vi ser att $-\ln X \in Exp(\theta+1)$ varför, enligt formelsamlingen,

$$E(-\ln X) = \frac{1}{\theta+1} \quad \Longrightarrow \quad E(\ln X) = \frac{-1}{\theta+1}.$$

(c) Skattningens väntevärde är lite besvärligt att härleda från definitionen av väntevärde (men inte alls omöjlig med lite genvägar). Med Gauss approximationsformler kan vi få ett approximativt uttryck.

Eftersom vi känner $E(\ln X_i)$ från b) behöver vi inte approximera den delen utan vi kan helt enkelt betrakta θ^* som en funktion av $\ln X_i$ och får

$$E(\theta^*_{ML}) = E\left(\frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1\right) \approx \frac{-n}{\sum_{i=1}^n E(\ln X_i)} - 1 = \frac{-n}{n\frac{-1}{\theta+1}} - 1 = \theta + 1 - 1 = \theta.$$

Denna approximation antyder alltså att skattningen skulle kunna vara väntevärdesriktig.

Om man nu inte klarat b), eller vill approximera "hela vägen", dvs även $E(\ln X_i)$ får vi först ta fram $E(X_i)$ som blir

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta\,dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}\,dx = \left[\frac{\theta+1}{\theta+2}\cdot x^{\theta+2}\right]_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

Det approximerade väntevärdet blir nu i stället

$$E(\theta^*_{ML}) = E\left(\frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1\right) \approx \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln E(X_i)} - 1 = \frac{-n}{n\ln\frac{\theta+1}{\theta+2}} - 1 = \frac{-1}{\ln\frac{\theta+1}{\theta+2}} - 1.$$

Denna approximation antyder alltså inte väntevärdesriktighet utan snarare att θ^*_{ML} skulle vara en överskattning av θ, eftersom (med denna approximation av väntevärdet) $E(\theta^*_{ML})$ ganska snart går mot $\theta + \frac{1}{2}$ då θ blir lite större än -1.

Nu är varken θ^*_{ML} väntevärdesriktig eller en överskattning av θ utan snarare en underskattning. Eftersom jag antytt att skattningens väntevärde går att räkna ut med lite trick (eller snarare utan att återuppfinna hjulet) kan vi väl lika gärna avsluta med att räkna ut det exakt. Här har vi nytta av att vi råkar veta att $-\ln X_i \in Exp(\theta+1)$ som är ett specialfall av gammafördelningen, $-\ln X_i \in \Gamma(1, \frac{1}{\theta+1})$, som har ett par användbara egenskaper. Se t.ex `http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution`. Med reglerna för summation och skalning av gammafördelning får vi

$$\begin{aligned}
-\log X_i &\in \Gamma(1, \frac{1}{\theta+1}) \\
-\sum_{i=1}^n \log X_i &\in \Gamma(n, \frac{1}{\theta+1}) \\
-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log X_i &\in \Gamma(n, \frac{n}{\theta+1})
\end{aligned}$$

Nu gäller att ett delat med en gammafördelning har en så kallad invers gammafördelning (se Wikipedia-artikeln) med känt väntevärde

$$\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log X_i\right)^{-1} \in \text{Inv-}\Gamma(\alpha,\beta),\ \text{där } \alpha = n \text{ och } \beta = \frac{\theta+1}{n} \text{ vars väntevärde, för } n > 1\text{, är}$$

$$\frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{\frac{\theta+1}{n}}{n-1} = \frac{n-1}{n}(\theta+1) = (1-\frac{1}{n})(\theta+1)$$

och väntevärdet av vår skattning blir

$$E(\theta^*_{ML}) = E\left(\frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1\right) = E\left[\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i\right)^{-1}\right] - 1 = (1-\frac{1}{n})(\theta+1) - 1$$

Skattningen är i alla fall assymptotiskt väntevärdesriktig (går mot θ då n går mot oändligheten, vilket gäller allmänt för ML-skattningar).