Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds tekniska högskola
Lunds universitet

Tentamen: 2011–05–31 kl 8^{00}–13^{00}
FMS 012 — Matematisk statistik för F, CDI, ΠE 9 hp
MAS B03 — Matematisk statistik för fysiker, 9 hp

Korrekt, väl motiverad lösning på uppgift 1–3 ger 10 poäng vardera medan uppgift 4–6 ger 20 poäng vardera. Totalt kan man få 90 poäng. Gränsen för godkänd är 40 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, Formelsamling i matematisk statistik AK 2001 eller senare, samt miniräknare.

Resultatet anslås *senast* tisdagen den 14 juni i matematikhusets entréhall och på kurshemsidan.

---

1. (a) För händelserna A och B gäller $P(A \cap B) = 0.3$ och $P(A^* \cap B) = 0.5$. Bestäm $P(A|B)$. (3p)

   (b) Tabellen visar fördelningsfunktionen för en diskret stokastisk variabel X: (3p)

k	0	1	2	3	4	5
$F_X(k)$	0	0.1	0.3	0.7	0.8	1.0

   Bestäm sannolikhetsfunktionen.

   (c) En affärsman har övernattningslägenheter i Lund och Stockholm. Arbetsbelastningen kan variera en del, och därmed även hans övernattningsort från dag till dag. Antag att växlingen mellan lägenheter från en kväll till nästföljande modelleras av en Markovkedja (tillstånd 1 motsvarar Lund, tillstånd 2 motsvarar Stockholm) med övergångsmatris (4p)

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

   Om han en måndagskväll en viss vecka befinner sig i Lund, vad är då sannolikheten att han följande onsdagskväll är i Stockholm?

2. Vid en utgrävning av Korsbetningen vid Visby 1928 fann man bland annat 493 lårben varav 256 var högerben och resten vänster. Rimligen borde det finnas ungefär lika många höger- som vänsterben begravda. Betrakta de 493 framgrävda benen som ett slumpmässigt stickprov av alla begravda lårben och gör ett tvåsidigt approximativt 95% konfidensintervall för andelen högerben bland dessa. Använda approximationer skall motiveras. (10p)

3. Låt X och Y vara stokastiska variabler med den simultana täthetsfunktionen (10p)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le y \le x \le 1, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

   Bestäm $E(X|Y = y)$.

4. Vid en undersökning lät man fastighetsägarna i 15 olika hus under en längre period notera skillnaden mellan innetemperatur och utetemperatur samtidigt som den dagliga energiförbrukningen (kWh) mättes.

   Följande är genomsnittsvärden för respektive hus:

Temperaturskillnad ($°C$)	10.3	11.4	11.5	12.5	13.1	13.4	13.6	15.0
Energiförbrukning (kWh)	69.81	82.75	81.75	80.38	85.89	75.32	69.81	78.54
Temperaturskillnad ($°C$)	15.2	15.3	15.6	16.4	16.5	17.0	17.1	
Energiförbrukning (kWh)	81.29	99.2	86.35	110.23	106.55	85.50	90.02	

Låt oss anta att den dagliga energiförbrukning (y) beror linjärt (inom vissa gränser) på temperaturskillnaden (x) enligt $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{15}$ är oberoende normalfördelade slumpfel $N(0, \sigma)$.

Följande summor kan vara till hjälp i beräkningarna:

$$\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2 = 66.576, \qquad \sum_{i=1}^{15}(y_i - \bar{y})^2 = 1973.607$$

$$\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 227.207$$

a) Skatta parametrarna i modellen. (6p)

b) Hur mycket ökar energiförbrukningen då temperaturskillnaden ökar en grad? Gör ett lämpligt konfidensintervall. (8p)

c) Antag att utetemperaturen en viss dag är $11.5°C$ och innetemperaturen $21.8°C$. Vad kan man då säga om energiförbrukningen? Gör ett lämpligt prediktionsintervall. (6p)

5. Vid tillverkning av en produkt är man intresserad av att utvärdera skillnaden mellan två olika tillverkningsmetoder. Antag att vi har oberoende observationer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ av $X \in N(\mu_x, 10)$ och $y_1, y_2, \ldots, y_n$ av $Y \in N(\mu_y, 10)$. Vid en preliminär undersökning har vi med $n = 20$ fått $\bar{x} = 23.2$ och $\bar{y} = 21.1$.

(a) Avgör med ett lämpligt hypotestest om μ_x är signifikant större än μ_y. Använd 5% felrisk. (10p)

(b) Låt $\mu = \mu_x - \mu_y$. Ange styrkefunktionen $h(\mu)$ för testet i a). Hur stort måste n vara för att styrkefunktionens värde i punkten $\mu = 2$ skall vara större än 0.5. (10p)

6. En kontinuerlig stokastisk variabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} (\theta + 1)\, x^{\theta}, & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Det gäller att $\theta > -1$. Antag att vi har oberoende observationer $x_1, \ldots, x_n$ av X.

(a) Bestäm ML-skattningen, θ^*_{ML}, av θ. (8p)

(b) Beräkna $E(\ln X_i)$. ($\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x = 0$ om $a > 0$) (6p)

(c) Använd Gauss approximationsformler och avgör om skattningen i a) verkar vara väntevärdesriktig. Om du inte klarat a) kan du använda skattningen (6p)

$$\theta^* = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}.$$

Lycka till!