Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds tekniska högskola
Lunds universitet

Tentamen: 2011–03–07 kl 8^{00}–13^{00}
FMS 012 — Matematisk statistik för ΠE, F, CDI 9 hp
MAS B03 — Matematisk statistik för fysiker, 9 hp

Korrekt, väl motiverad lösning på uppgift 1–3 ger 10 poäng vardera medan uppgift 4–6 ger 20 poäng vardera. Totalt kan man få 90 poäng. Gränsen för godkänd är 40 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, Formelsamling i matematisk statistik AK 2001 eller senare, samt miniräknare.

Resultatet anslås *senast* måndagen den 21 mars i matematikhusets entréhall och på kurshemsidan.

---

1. (a) För den stokastiska variabeln X gäller (2p)

$$P(X=1)=0.5, \quad P(X=2)=0.2, \quad P(X=3)=0.3$$

Bestäm $E(1/X)$.

(b) Beräkna $C(X, X^2)$ om $X \in R(0,1)$-fördelad ($X \in U(0,1)$ med bokens beteckning). (4p)

(c) Beräkna $P(X > E(X))$ om $X \in Po(2)$ respektive om $X \in N(\pi, e)$. (4p)

2. Kapacitansmätning på ett stickprov av kondensatorer gav följande värden

$$45.1 \quad 45.6 \quad 44.1 \quad 44.1 \quad 46.3 \quad 44.3 \quad 44.6 \quad 46.7 \quad 46.6$$

i enheten nF. Antag att observationerna är normalfördelade, $X_i \in N(\mu, \sigma)$ samt oberoende av varandra.

(a) Använd normalfördelningsantagandet och skatta sannolikheten att få minst 47 nF i en mätning, dvs $P(X_i \geq 47)$. (5p)

(b) Beräkna ett 95% konfidensintervall för väntevärdet μ. (5p)

3. Speltokige Harry anser att hans turnummer i Lotto, 11, har större sannolikhet att komma med som ordinarie vinstnummer än det teoretiska $p_0 = \frac{1}{5}$. Tittar man på de senaste tio rätta raderna så verkar ju hans misstanke befogad eftersom 11 förekommer hela 6 gånger. (10p)

3	9	11	14	26	33	34
7	11	13	14	23	25	34
8	10	12	13	18	24	32
4	6	8	11	12	22	26
1	2	3	7	15	17	27
2	4	6	13	17	25	28
6	8	10	17	22	26	27
2	7	10	11	13	29	35
3	6	11	12	23	26	27
6	7	11	13	15	20	32

Avgör med ett lämpligt test om Harrys misstanke är befogad.

Var god vänd!

4. Enligt Hookes lag är förlängningen y av en fjäder en linjär funktion av belastningen x. Vid konstruktionen av en våg har man använt sig av denna princip. För att kalibrera vågen mätte man förlängningen y av fjädern för var och en av 9 olika precisionsbestämda vikter x_i, $i = 1, 2, \dots, 9$. Följande värden erhölls:

x_i:	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i:	6.2	7.1	7.9	8.9	10.8	12.3	12.7	13.6	15.0

Man beräknade följande storheter.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 72, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 94.5, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 823.7, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 636, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1070$$

(a) Ansätt en enkel linjär regressionsmodell $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, där ε_i är oberoende observationer av $N(0, \sigma)$, och skatta α, β och σ. (5p)

(b) Gör ett 95% konfidensintervall för β. (5p)

(c) Antag att man för ett okänt värde på x, säg x_0, mätt motsvarande y-värde till 11.4. Beräkna en skattning av x_0. (2p)

(d) Egentligen borde regressionslinjen gå igenom origo. För att den skattade linjen skall göra det kan man använda modellen $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_i \in N(0, \sigma)$ (dvs $Y_i \in N(\beta x_i, \sigma)$). Härled MK-skattningen av β enligt den modellen. (8p)

5. Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende och Exp(1)-fördelade stokastiska variabler.

(a) Vad är sannolikheten att summan av två av dem är mindre än 2? (6p)

(b) Om man tar tio av dem, vad är sannolikheten att högst tre av de tio är mindre än 1? (5p)

(c) Vad är sannolikheten att den största av fyra av dem är mindre än 3? (5p)

(d) Vad är sannolikheten att man behöver plocka minst fem av dem innan man hittar någon som är större än 1? (4p)

6. $x_1, x_2, \dots, x_n$ är oberoende observationer av Maxwellfördelade stokastiska variabler, dvs med täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x^2}{\alpha^{3/2}} e^{-x^2/(2\alpha)}, \quad x \geq 0$$

I denna fördelning är väntevärdet $\sqrt{8\alpha/\pi}$ och variansen är $\alpha(3 - 8/\pi)$.

(a) Bestäm ML-skattningen av α. (10p)

(b) Avgör om ML-skattningen är väntevärdesriktig. (10p)

Lycka till!