1. Inför beteckningarna I="Valt äpple är ett Ingrid-Marie", C="Valt äpple är ett Cox Orange" och M="Äpplet är maskätet". Från uppgiften vet vi att: $\mathsf{P}(I) = 0.25, \mathsf{P}(C) = 1 - \mathsf{P}(I) = 0.75, \mathsf{P}(M|I) = 0.1, \mathsf{P}(M|C) = 0.05$.

   (a) Vi vill veta $\mathsf{P}(M^*)$.
   Lösning: Satsen om total sannolikhet ger:
   $\mathsf{P}(M) = \mathsf{P}(M|I)\mathsf{P}(I) + \mathsf{P}(M|C)\mathsf{P}(C) = 0.1 \cdot 0.25 + 0.05 \cdot 0.75 = 0.0625$. Slutligen har vi att $\mathsf{P}(M^*) = 1 - \mathsf{P}(M) = 0.9375$.

   (b) Vi vill veta $\mathsf{P}(C|M)$.
   Lösning: $\mathsf{P}(C|M) = \mathsf{P}(C \cap M)/\mathsf{P}(M) = \mathsf{P}(M|C)\mathsf{P}(C)/\mathsf{P}(M) = 0.05 \cdot 0.75/0.0625 = 0.6$.

2. (a) Vi har att

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

   Vi vill beräkna väntevärde och varians för X. **Lösning:** Eftersom X har en kontinuerlig fördelning gäller:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\ &= \int_1^{\infty} x\frac{3}{x^4}dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{3}{x^3}dx \\ &= \left[-\frac{3}{2x^2}\right]_1^{\infty} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

   Vi har att $\mathsf{V}[X] = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2$.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \\ &= \int_1^{\infty} x^2\frac{3}{x^4}dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{3}{x^2}dx \\ &= \left[-\frac{3}{x}\right]_1^{\infty} = 3, \end{aligned}$$

   vilket ger att

$$V[X] = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

(b) Vi vill veta $\mathsf{P}(\min(X_1, X_2, X_3, X_4) < 5)$ där X_1, X_2, X_3 och X_4 är oberoende och likafördelade med samma fördelning som i (a). **Lösning:** Det lättaste är att först räkna på händelsen $\mathsf{P}(\min(X_1, X_2, X_3, X_4) \geq 5)$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\min(X_1, X_2, X_3, X_4) \geq 5) &= \mathsf{P}(X_1 \geq 5, X_2 \geq 5, X_3 \geq 5, X_4 \geq 5) \\
&\overset{ober}{=} \mathsf{P}(X_1 \geq 5)^4 \\
&= \left(\int_5^\infty \frac{3}{x^4} dx \right)^4 \\
&= \left(\left[-\frac{1}{x^3} \right]_5^\infty \right)^4 = \frac{1}{5^{12}},
\end{aligned}$$

vilket ger att

$$\mathsf{P}(\min(X_1, X_2, X_3, X_4) < 5) = 1 - \frac{1}{5^{12}} = 0.999999996 \approx 1.$$

3. (a) Låt X =antalet bilar i ett slumpmässigt valt hushåll. Vi vill veta väntevärde och varians för för X.

Lösning: Från uppgiften har vi att $\mathsf{P}(X = 0) = 0.3, \mathsf{P}(X = 1) = 0.6$ och $\mathsf{P}(X = 2) = 0.1$.

$$\mathsf{E}[X] = \sum_k kP(X = k) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}[X] &= \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 \\
&= (\sum_k k^2 P(X = k)) - 0.8^2 \\
&= 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.8^2 = 0.36.
\end{aligned}$$

(b) Låt

$$Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i,$$

där X_i:na är oberoende och likafördelade med samma fördelning som i (a). Vi vill beräkna $\mathsf{P}(Y > 850)$. **Lösning:** Eftersom Y är en summa av många oberoende och likafördelade stokastiska variabler så säger centrala gränsvärdessatsen att $Y \underset{\sim}{\in} N(\mathsf{E}[Y], \sqrt{\mathsf{V}[Y]})$.

$$\mathsf{E}[Y] = \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{1000} X_i\right] = \sum_{i=1}^{1000} \mathsf{E}[X_i] \overset{\text{lika förd}}{=} 1000 \cdot 0.8 = 800,$$

$$\mathsf{V}[Y] = \mathsf{V}\left[\sum_{i=1}^{1000} X_i\right] \overset{\text{ober}}{=} \sum_{i=1}^{1000} \mathsf{V}[X_i] \overset{\text{lika förd}}{=} 1000 \cdot 0.36 = 360,$$

vilket ger att $Y \underset{\sim}{\in} N(800, \sqrt{360})$. Vi kan nu approximativt beräkna $\mathsf{P}(Y > 850)$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y > 850) &\approx \mathsf{P}(N\left(800, \sqrt{360}\right) > 850) \\
&\quad [\text{standardisera}] \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{850 - 800}{\sqrt{360}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{50}{6\sqrt{10}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(2.64) \\
&= [\text{Tabell}] = 1 - 0.99585 = 0.00415 \approx 0.0042.
\end{aligned}$$

4. Vi har att

$$f_{X,Y}(x,y) = 3y,\ 0 < x < y < 1.$$

(a) Vi vill beräkna X:s marginaltäthet $f_X(x)$. **Lösning:** Först ser vi att $f_X(x) = 0$ för $x < 0$ och $x > 1$ ty $f_{X,Y}(x,y) = 0$ för dessa x. Antag $0 < x < 1$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^1 3ydy = \left[\frac{3}{2}y^2\right]_x^1 = \frac{3}{2}(1-x^2)$$

vilket ger att

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

(b) **Lösning:** Vi börjar med att konstatera att två kontinuerliga stokastiska variabler X och Y är oberoende om och endast om $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla x och y. Vi behöver således beräkna $f_Y(y)$. För $y < 0$ och $y > 1$ är $f_y(y) = 0$ ty $f_{X,Y}(x,y) = 0$ för dessa y. Antag att $0 < y < 1$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 3ydx = \left[3yx\right]_0^y = 3y^2,$$

vilket ger att

$$f_X(x) = \begin{cases} 3y^2 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Vi har nu att

$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2)3y^2 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \neq \begin{cases} 3y & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} = f_{X,Y}(x,y).$$

Detta ger att X och Y inte är oberoende.

Alternativ lösning: Betrakta exempelvis fallen $Y = 1/2$ och $Y = 1/4$. För $Y = 1/2$ kan X anta värden mellan 0 och $1/2$ medan för $Y = 1/4$ kan X endast anta värden mellan 0 och $1/4$. Möjliga utfall för X beror alltså på vilket värde Y har och därför kan inte X och Y vara oberoende.