Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds tekniska högskola
Lunds universitet

Lösning till Dugga: 2011–10–14 kl 8^{00}–10^{00}
FMS 012 — Matematisk statistik för CDI 9 hp
MAS B03 — Matematisk statistik för fysiker, 9 hp

---

1. (a) Vi har fått reda på att $\mathsf{P}(\text{gul}) = 0.3$, $\mathsf{P}(\text{röd}) = 0.5$, $\mathsf{P}(\text{svart}) = 0.2$, samt att $\mathsf{P}(\text{äta} \mid \text{gul}) = 0.9$, $\mathsf{P}(\text{äta} \mid \text{röd}) = 0.6$ och $\mathsf{P}(\text{äta} \mid \text{svart}) = 0.1$.
Satsen om total sannolikhet ger då att

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\text{äta}) &= \mathsf{P}(\text{äta} \mid \text{gul}) \cdot \mathsf{P}(\text{gul}) + \mathsf{P}(\text{äta} \mid \text{röd}) \cdot \mathsf{P}(\text{röd}) + \mathsf{P}(\text{äta} \mid \text{svart}) \cdot \mathsf{P}(\text{svart}) \\ &= 0.9 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.59.\end{aligned}$$

(b) Vi vill beräkna $\mathsf{P}(\text{gul} \mid \text{äta})$. Definitionen av betingad sannolikhet ger

$$\mathsf{P}(\text{gul} \mid \text{äta}) = \frac{\mathsf{P}(\text{gul} \cap \text{äta})}{\mathsf{P}(\text{äta})} = \frac{\mathsf{P}(\text{äta} \mid \text{gul}) \cdot \mathsf{P}(\text{gul})}{\mathsf{P}(\text{äta})} = \frac{0.9 \cdot 0.3}{0.59} \approx 0.458.$$

2. (a) Vi har att $X =$ ”vikten av en vuxen sjöborre” $\in N(52,\ 17.2)$ så att

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(50 \le X \le 60) = \mathsf{P}(X \le 60) - \mathsf{P}(X < 50) = [\text{kontinuerlig fördelning}] \\ &= \mathsf{P}(X \le 60) - \mathsf{P}(X \le 50) = [\text{standardisera}] \\ &= \mathsf{P}(\frac{X-52}{17.2} \le \frac{60-52}{17.2}) - \mathsf{P}(\frac{X-52}{17.2} \le \frac{50-52}{17.2}) \\ &= \Phi(\frac{60-52}{17.2}) - \Phi(\frac{50-52}{17.2}) = \Phi(0.47) - \Phi(-0.12) \\ &= \Phi(0.47) - 1 + \Phi(0.12) = [\text{Tabell 1}] = 0.6808 - 1 + 0.5478 = 0.2286.\end{aligned}$$

(b) Vi har nu att $X_i \in N(52,\ 17.2)$ och oberoende med $i = 1, \ldots, n$ där $n = 100$ vilket ger $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i =$ ”totala vikten av 100 sjöborrar”. Då gäller att

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(Y) &= \mathsf{E}(\sum_{i=1}^{100} X_i) = \sum_{i=1}^{100} \mathsf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{100} 52 = 100 \cdot 52 = 5200\,\text{g}, \\ \mathsf{V}(Y) &= \mathsf{V}(\sum_{i=1}^{100} X_i) = [\text{oberoende}] = \sum_{i=1}^{100} \mathsf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{100} 17.2^2 = 100 \cdot 17.2^2\,\text{g}^2, \\ D(Y) &= \sqrt{\mathsf{V}(Y)} = \sqrt{100 \cdot 17.2^2} = 10 \cdot 17.2 = 172\,\text{g}.\end{aligned}$$

Eftersom X_i är normalfördelade gäller också att $Y \in N(5200,\ 172)$ så att

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(5000 \le Y \le 6000) = \mathsf{P}(Y \le 6000) - \mathsf{P}(Y \le 5000) \\ &= \mathsf{P}(\frac{Y-5200}{172} \le \frac{6000-5200}{172}) - \mathsf{P}(\frac{Y-5200}{172} \le \frac{5000-5200}{172}) \\ &= \Phi(\frac{6000-5200}{172}) - \Phi(\frac{5000-5200}{172}) = \Phi(4.65) - \Phi(-1.16) \\ &= \Phi(4.65) - 1 + \Phi(1.16) = 1.000 - 1 + 0.8770 = 0.8770.\end{aligned}$$

3. (a) Vi har att $X =$ "antal löv som faller under en minut" $\in Po(3 \cdot 1) = Po(3)$ så att

$$\mathsf{P}(X = 2) = p_X(2) = \mathrm{e}^{-3} \cdot \frac{3^2}{2!} \approx 0.224.$$

(b) Vi har nu att $Y =$ "antal löv som faller under 20 minuter" $\in Po(3 \cdot 20) = Po(60)$. Eftersom $60 > 15$ kan vi normalapproximera så att $Y \underset{\sim}{\in} N\left(60,\ \sqrt{60}\right)$ och

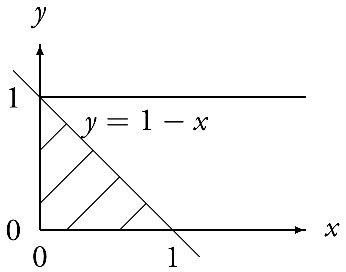
$$\mathsf{P}(Y \leq 40) = \mathsf{P}(\frac{Y - 60}{\sqrt{60}} \leq \frac{40 - 60}{\sqrt{60}}) \approx \Phi(\frac{40 - 60}{\sqrt{60}}) = \Phi(-2.58)$$
$$= 1 - \Phi(2.58) = 1 - 0.9951 = 0.0049.$$

4. (a) Vi har att $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dy = \left[y\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^{-x}$ för $x \geq 0$ och $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$ för $0 \leq y \leq 1$.

Detta kan vi känna igen som att $X \in Exp(1)$ och $Y \in R(0,\ 1)$.

Eftersom $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \mathrm{e}^{-x} \cdot 1 = \mathrm{e}^{-x} = f_{X,Y}(x, y)$ för alla $x \geq 0$ och $0 \leq y \leq 1$ så är X och Y oberoende.

(b) Rita integrationsområdet! Vi får nu att



$$\mathsf{P}(X + Y \leq 1) = \iint_{x+y\leq 1} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \mathrm{e}^{-x}\, dy\right) dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \left[y\right]_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 (1 - x)\mathrm{e}^{-x}\, dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx - \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\, dx$$
$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx - \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx$$
$$= \mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$$

Det är kanske lite enklare att först integrera över x och sedan över y:

$$\mathsf{P}(X + Y \leq 1) = \iint_{x+y\leq 1} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \mathrm{e}^{-x}\, dx\right) dy$$
$$= \int_0^1 \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{1-y} dy = \int_0^1 (1 - \mathrm{e}^{y-1})\, dy = \left[y - \mathrm{e}^{y-1}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Eller över komplementet:

$$\mathsf{P}(X + Y \leq 1) = 1 - \mathsf{P}(X + Y > 1) = 1 - \iint_{x+y>1} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$$
$$= 1 - \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx\right) dy = 1 - \int_0^1 \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{1-y}^{\infty} dy = 1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{y-1}\, dy$$
$$= 1 - \left[\mathrm{e}^{y-1}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}.$$