1. Om vi inför följande händelser:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{Ett batteri är tillverkat i fabrik } A, \\
B &= \text{Ett batteri är tillverkat i fabrik } B, \\
C &= \text{Ett batteri är tillverkat i fabrik } C, \\
F &= \text{Ett batteri kan driva en mp3-spelare i minst 10 timmar,}
\end{aligned}
$$

har vi följande givna sannolikheter:

$$
\begin{array}{lll}
P(A) = 0.50, & P(B) = 0.20, & P(C) = 0.30, \\
P(F \mid A) = 0.90, & P(F \mid B) = 0.96, & P(F \mid C) = 0.98.
\end{array}
$$

(a) Med satsen om total sannolikhet fås

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P(F \mid A) \cdot P(A) + P(F \mid B) \cdot P(B) + P(F \mid C) \cdot P(C) = \\
&= 0.90 \cdot 0.50 + 0.96 \cdot 0.20 + 0.98 \cdot 0.30 = 0.936.
\end{aligned}
$$

(b) Ingrids batteri räckte bara åtta timar, dvs inte minst tio timmar. Med definitionen om betingad sannolikhet två gånger (Bayess sats) och komplement får vi därför

$$
\begin{aligned}
P(A \mid F^*) &= \frac{P(A \cap F^*)}{P(F^*)} = \frac{P(F^* \mid A)P(A)}{P(F^*)} = \frac{(1 - P(F \mid A))P(A)}{1 - P(F)} = \\
&= \frac{(1 - 0.90) \cdot 0.50}{1 - 0.936} \approx 0.781.
\end{aligned}
$$

2. (a) Fördelningsfunktionen för den maximala vindstyrkan, kalla den X, var given i uppgiften.

$$
P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - F_X(30) = 1 - e^{-e^{-(30-17)/3}} \approx 0.013
$$

(b) Medianen, $x_{0.5}$, är det samma som 50%–kvantilen, dvs den vindstyrka som både över- och underskrids med 50% chans. Den fås ur

$$
\begin{aligned}
F_X(x_{0.5}) &= \frac{1}{2} \\
e^{-e^{-(x_{0.5}-b)/a}} &= \frac{1}{2} \\
e^{-(x_{0.5}-b)/a} &= -\ln(\frac{1}{2}) = \ln(2) \\
\frac{(x_{0.5} - b)}{a} &= -\ln(\ln(2)) \\
x_{0.5} &= -a\ln(\ln(2)) + b = -3\ln(\ln(2)) + 17 \approx 18.0995 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

3. (a) Om vi kallar blodsockerhalten två timmar efter glukosintag för X, så är $X \in N(5.0, 1.8)$. Sannolikheten att blodsockerhalten är mellan 7.8 och 11.0 mmol/l blir

$$P(7.8 \leq X \leq 11.0) = [\text{standardisera}] = P\left(\frac{7.8-5.0}{1.8} \leq \frac{X-5.0}{1.8} \leq \frac{11.0-5.0}{1.8}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{11.0-5.0}{1.8}\right) - \Phi\left(\frac{7.8-5.0}{1.8}\right) \approx \Phi(3.3) - \Phi(1.56) \approx$$
$$= [\text{Tabell 1}] = 0.99952 - 0.9406 \approx 0.0589$$

(b) Om vi låter $X_i,\ i = 1, 2, \dots, n = 25$ vara 2-timmarsvärdet för person nr i och beteckar medelvärdet mellan dessa med $\bar{X}$, så är även $\bar{X}$ normalfördelad, $\bar{X} \in N(E(\bar{X}), D(\bar{X}))$, eftersom det är en linjär funktion av oberoende normalfördelningar. $E(\bar{X})$ och $D(\bar{X})$ (antag oberoende) blir

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot nE(X_i) = E(X_i) = 5.0$$
$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot nV(X_i) = \frac{V(X_i)}{n} = \frac{1.8^2}{25} \approx 0.1296$$
$$D(\bar{X}) = \sqrt{V(\bar{X})} \approx 0.360$$

Den sökta sannolikheten blir

$$P(\bar{X} > 5.5) = 1 - P(\bar{X} \leq 5.5) = 1 - \Phi\left(\frac{5.5-5.0}{0.360}\right) \approx 1 - \Phi(1.39) \approx 0.0823$$

4. (a) Den marginella sannolikhetsfunktionen för X i en punkt j fås genom att summera den tvådimensionella sannolikhetsfunktionen över alla k för detta i, dvs radvis i tabellen.

$$p_X(0) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(0,k) = 0.14 + 0.35 + 0.21 = 0.70$$
$$p_X(1) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(1,k) = 0.04 + 0.10 + 0.06 = 0.20$$
$$p_X(2) = \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(2,k) = 0.02 + 0.05 + 0.03 = 0.10$$

Motsvarande för Y fås på motsvarande sätt genom att summera kollonvis

k	0	1	2
$p_Y(k)$	0.2	0.5	0.3

X varians blir

$$E(X) = \sum_{j=0}^{2} j \cdot p_X(j) = 0 \cdot 0.70 + 1 \cdot 0.20 + 2 \cdot 0.10 = 0.40$$
$$E(X^2) = \sum_{j=0}^{2} j^2 \cdot p_X(j) = 0^2 \cdot 0.70 + 1^2 \cdot 0.20 + 2^2 \cdot 0.10 = 0.60$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.60 - 0.40^2 = 0.44$$

(b) Den sökta sannolikheten fås genom att summera $p_{X,Y}(j,k)$ över alla element där $j+k \leq 2$, dvs på och över (eftersom j-axeln går nedåt) diagonalen $i+j=2$.

$$
\begin{aligned}
P(X+Y \leq 2) = \sum_{j+k\leq 2} p_{X,Y}(j,k) = \\
&= p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,0) = \\
&= 0.14 + 0.35 + 0.21 + 0.04 + 0.10 + 0.02 = 0.86
\end{aligned}
$$

Lite färre termer får man om man använder komplement

$$
\begin{aligned}
P(X+Y \leq 2) = 1 - P(X+Y > 2) = 1 - \sum_{j+k>2} p_{X,Y}(j,k) = \\
&= 1 - (p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(2,2)) = \\
&= 1 - (0.06 + 0.05 + 0.03) = 0.86
\end{aligned}
$$