**Matematisk statistik**
**Matematikcentrum**
**Lunds tekniska högskola**
**Lunds universitet**

**Lösningsförslag dugga 2010–10–15 kl $15^{00}$–$17^{00}$**
**FMS 012 — Matematisk statistik för CDI, 9 hp**

1. Låt $\Omega$ vara samtliga studenter och låt mängderna $D$ och $G$ utgöras av de studenter som deltog i duggan resp. blev godkända på decembertentan; då har vi enligt uppgift sannolikheterna

$$P(D) = 68/157, \quad P(G|D) = 0.809, \quad P(G|D^*) = 0.584\,.$$

Satsen om total sannolikhet ger sålunda

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G|D)P(D) + P(G|D^*)P(D^*) = P(G|D)P(D) + P(G|D^*)(1 - P(D)) \\ &= 0.809 \cdot \frac{68}{157} + 0.584 \cdot \frac{89}{157} \approx \underline{0.68}\,, \end{aligned}$$

vilket är svaret på (a). För att lösa (b), d.v.s. beräkna den betingade sannolikheten $P(D^*|G^*)$, vänder vi på betingningen enligt

$$\begin{aligned} P(D^*|G^*) &= \frac{P(D^* \cap G^*)}{P(G^*)} = \frac{P(G^*|D^*)P(D^*)}{P(G^*)} = \frac{\{1 - P(G|D^*)\}P(D^*)}{P(G^*)} \\ &= \frac{\{1 - P(G|D^*)\}\{1 - P(D)\}}{1 - P(G)} = \frac{(1 - 0.584)(89/157)}{1 - 0.68} \approx \underline{0.74}\,, \end{aligned}$$

där de två första likheterna följer av definitionen av betingad sannolihet.

2. Det gäller att

$$\begin{aligned} &P(\text{Ferry tvingas använda minst ett extraskott}) \\ &\qquad = 1 - P(\text{Ferry träffar alla de fem första skotten}) = 1 - 0.85^5 \approx \underline{0.56}\,, \end{aligned}$$

vilket är svaret på den första deluppgiften.

För att lösa (b) konstaterar vi att Ferry tvingas att åka en straffrunda om han missar fyra skott eller fler; sannolikheten för detta är precis sannolikheten att vi, i ett binomialförsök med $n = 8$ upprepningar och sannolikhet $p = 0.15$ att lyckas (i detta fall lyckas att *missa* en tavla), lyckas fyra eller fler gånger. Vi låter därför $Y \sim Bin(8, 0.15)$ och räknar enligt

$$P(\text{Ferry tvingas att åka en straffrunda}) = P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) \approx 1 - 0.98\,,$$

där vi erhöll det sista värdet ur tabellen över binomialfördelningens fördelningsfunktion. Således är den sökta sannolikheten för komplementhändelsen, d.v.s. att Ferry slipper att åka straffrunda, $\underline{0.98}$.

3. Vi bestämmer först väntevärde och varians för en deltagares vinst $X_i$. Enligt definitionen av väntevärde gäller

$$E(X_i) = 5P(X_i = 5) + 90P(x_i = 90) = 5 \cdot 0.17 + 90 \cdot 0.02 = 2.65$$

samt, på samma sätt,

$$E(X_i^2) = 5^2 \cdot 0.17 + 90^2 \cdot 0.02 \approx 166.25\,.$$

Ur detta får vi variansen $V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 \approx 159.23$. Låt nu $T = \sum_{i=1}^{2000} X_i$ vara den sammanlagda vinsten för de 2000 deltagarna. Då väntevärden är linjära får vi

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{2000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{2000} E(X_i) = 2000 \cdot 2.65 = 5300$$

samt, då de enskilda vinsterna $(X_i)_{i=1}^{2000}$ är oberoende,

$$V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{2000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{2000} V(X_i) \approx 2000 \cdot 159.23 = 318455\,,$$

vilket ger att $D(T) \approx 564$. Då $T$ är en summa av ett stort antal likafördelade och oberoende variabler gäller, enligt centrala gränsvärdessatsen, att $T$ är approximativt $N(5300, 564)$-fördelad. Vi får då

$$P(T > 6000) = 1 - P(T \leq 6000) = 1 - P\left(\frac{T - 5300}{564} \leq \frac{6000 - 5300}{564}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(1.24) \approx 1 - 0.8925 \approx \underline{0.11}\,,$$

där $\Phi$ betecknar den standardiserade normalfördelningens fördelningsfunktion och dess värde i punkten $x = 1.24$ erhölls ur tabell.

4. Då $f_{X,Y}(x,y)$ är en täthetsfunktion gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1\,.$$

Vänsterledet i ovan likhet beräknas enligt

$$\int_0^{\infty}\int_0^{x} c\,e^{-x^2}\,dy\,dx = c\int_0^{\infty} e^{-x^2}\int_0^{x} dy\,dx = c\int_0^{\infty} e^{-x^2} x\,dx = c\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{c}{2}\,,$$

och genom att sätta detta uttryck lika med 1 erhåller vi $\underline{c = 2}$, vilket är svaret på (a).

För att lösa (b) bestämmer vi först marginaltätheten $f_X(x)$ enligt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{x} 2\,e^{-x^2}\,dy = 2\,e^{-x^2}\int_0^{x} dy = 2e^{-x^2}x\,,$$

där vi har använt oss av det värde på konstanten $c = 2$ som erhölls i (a). För att slutligen beräkna den sökta sannolikheten integrerar vi $f_X(x)$ enligt

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 f_X(x)\,dx = \int_0^1 2e^{-x^2}x\,dx = \left[-e^{-x^2}\right]_{x=0}^{1} = 1 - e^{-1} \approx \underline{0.63}\,,$$

vilket är svaret på (b).