Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds tekniska högskola
Lunds universitet

Lösningsförslag dugga 2008–12–12 kl 8^{00}–10^{00}
FMS 012 — Matematisk statistik för Π, 9 hp

---

1. Låt A vara händelsen att en kund kontaktar support-tjänsten inom en vecka och D att ett datorpaket är defekt, då har vi

$$P(D) = 0.05, \quad P(D^*) = 0.95, \quad P(A|D) = 0.90, \quad P(A|D^*) = 0.20.$$

   (a) Sannolikheten att en kund kontaktar telefonsupporten inom en vecka fås med satsen om total sannolikhet till

$$P(A) = P(A|D)P(D) + P(A|D^*)P(D^*) = 0.90 \cdot 0.05 + 0.20 \cdot 0.95 = 0.235.$$

   (b) Den sökta sannolikheten är

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|D)P(D)}{P(A)} = \frac{0.90 \cdot 0.05}{0.235} \approx 0.192.$$

2. Låt X vara mängden mjölk i en förpackning. Då är enligt uppgift $X \in N(1.02, 0.02)$

   (a) Sannolikheten att ett paket innehåller mindre än en liter blir

$$P(X < 1.00) = \Phi\left(\frac{1.00 - 1.02}{0.02}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = [\text{Tabell 1}] = 1 - 0.8423 = 0.1587.$$

   (b) Om X_i är mängden mjölk i kartong nr i så är den totala mängden i 5 förpackningar $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$ och en linjär funktion av normalfördelningar är normalfördelad $Y \in N(E(Y), D(Y))$ där

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) = \sum_{i=1}^{5} E(X_i) = \sum_{i=1}^{5} 1.02 = 5.10 \\
V(Y) &= V\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) = \sum_{i=1}^{5} V(X_i) = \sum_{i=1}^{5} 0.02^2 = 5 \cdot 0.02^2 \\
D(Y) &= \sqrt{V(Y)} = 0.02 \cdot \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

   Den sökta sannolikheten blir

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 5.15) = 1 - P(Y < 5.15) = 1 - \Phi\left(\frac{5.15 - 5.10}{0.02 \cdot \sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi(1.12) = \\
= 1 - 0.8686 = 0.1314.
\end{aligned}$$

3. Låt X vara livslängden av system A och Y livslängden för system B. För $Exp(\lambda)$ är väntevärdet $1/\lambda$ så vi har $X \in Exp(1/8)$ och $Y \in Exp(1/12)$. Fördelningsfunktionen för en exponentialfördelning med tätheten $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ är

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$$

   (a) Vardera sannolikheten att de två komponenterna går sönder inom tio år fås till

$$\begin{aligned}
P(X \leq 10) &= F_X(10) = 1 - e^{-10/8} \approx 0.7135 \\
P(Y \leq 10) &= F_Y(10) = 1 - e^{-10/12} \approx 0.5654
\end{aligned}$$

(b) Den komponent som går sönder först bestämmer systemets livslängd. Den sökta sannolikheten blir därför

$$\begin{aligned}P(\min(X,Y)\le 10) &= 1-P(\min(X,Y)>10) = 1-P(X>10, Y>10) = [\text{ober.}] = \\ &= 1-P(X>10)P(Y>10) = 1-[1-F_X(10)][1-F_Y(10)] = \\ &= 1-e^{-10/8}\cdot e^{-10/12}\approx 0.8755\end{aligned}$$

vilket vi känner igen som sannolikheten att någon av händelserna $X\le 10$ och $Y\le 10$ inträffar.

4. Rita upp det om område i (x,y)-planet där $f_{X,Y}(x,y)$ är större än 0, dvs den triangel som begränsas av linjerna $x=0$, $y=0$ och $y=1-x$.

(a) Y's täthetsfunktion blir

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx=\int_0^{1-y} e^{1-x}\,dx = e\left[-e^{-x}\right]_0^{1-y} = e(1-e^{-(1-y)}) = e-e^y,\quad 0\le y\le 1$$

(b) och dess väntevärde

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y(e-e^y)\,dy = e\int_0^1 y\,dy - \int_0^1 ye^y\,dy = \\ &= e\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 - \left[ye^y\right]_0^1 + \int_0^1 e^y\,dy = \frac{e}{2}-e+[e^y]_0^1 = -\frac{e}{2}+e-1 = \frac{e}{2}-1.\end{aligned}$$

Väljer man istället att räkna med Y' fås dess väntevärde till

$$\begin{aligned}E(Y') &= \frac{2e}{1+e}\int_0^1 y\,dy - \frac{1}{1+e}\int_0^1 ye^y dy = \frac{2e}{1+e}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{1+e}\left[ye^y\right]_0^1 + \frac{1}{1+e}\int_0^1 e^y dy = \\ &= \frac{2e}{1+e}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}\cdot e + \frac{1}{1+e}[e^y]_0^1 = 0 + \frac{1}{1+e}(e-1) = \frac{e-1}{e+1}.\end{aligned}$$