Dugga 08-04-18

1) a) Låt I = Inbrott under en natt
L = Larmet går under en natt

Givna sannolikheter

$$P(L|I) = 0.99$$
$$P(L|I^*) = 0.005$$
$$P(I) = 0.001$$

Satsen om total sannolikhet ger

$$P(L) = P(L|I)\cdot P(I) + P(L|I^*)\cdot P(I^*)$$
$$= 0.99\cdot 0.001 + 0.005\cdot(1-0.001) = 0.0060$$

b) $$P(I|L) = \frac{P(I\cap L)}{P(L)} = \frac{P(L|I)\cdot P(I)}{P(L)} = \frac{0.99\cdot 0.001}{0.0060} =$$
$$= 0.165$$

---

2) a) $$F_X(x) = 1 - \frac{1}{x^3}, \quad x \geq 1$$
$$P(X \leq 2) = F_X(2) = 1 - \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

b) $$P(X>3 | X>2) = \frac{P(X>3, X>2)}{P(X>2)} = \frac{P(X>2|X>3)P(X>3)}{P(X>2)}$$
$$= \frac{1\cdot(1-F_X(3))}{1-F_X(2)} = \frac{1/3^3}{1/2^3} = \frac{8}{27}$$

c) $$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{3}{x^4}, \quad x \geq 1$$
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{3x}{x^4}\,dx = \left[-\frac{3}{2x^2}\right]_1^{\infty} = \frac{3}{2}$$
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{3x^2}{x^4}\,dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^{\infty} = 3$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

③ a) Låt X = Antal bilar i ett slumpm. hushåll.

X sannolikhetsfunktion är enl. uppg.

k	0	1	2
$p_X(k)$	0.3	0.6	0.1

$$E(X) = \sum_k k\, p_X(k) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$$

$$E(X^2) = \sum_k k^2 p_X(k) = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 = 1.0$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0.8^2 = 0.36$$

b) Låt Y = totala antalet bilar i bostadsområdet

Då är $Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ där X_i är fördelade enl. a)

$$E(Y) = E\left(\sum_1^{1000} X_i\right) = \sum_1^{1000} E(X_i) = 1000 \cdot 0.8 = 800$$

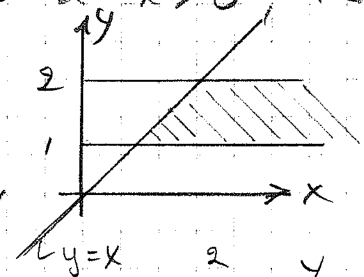
$$V(Y) = V\left(\sum_1^{1000} X_i\right) = \sum_1^{1000} V(X_i) = 1000 \cdot 0.36 = 360$$

---

④ a) $f_X(x) = \frac{1}{5} e^{-x/5}, \ x > 0, \quad f_Y(y) = 1, \ 1 \le y \le 2$

Ober $\Rightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = 1 \cdot \frac{1}{5} e^{-x/5}, \ x > 0, \ 1 \le y \le 2$

Konstruktionen håller om $X > Y$. Detta område tillsammans med $x > 0$, $1 \le y < 2$ ritas i (x,y)-planet



b) $P(X > Y) = \iint_{x>y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_1^2 \int_y^\infty \frac{1}{5} e^{-x/5}\,dx\,dy = \int_1^2 \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_y^\infty dy = \int_1^2 e^{-\frac{y}{5}}\,dy =$$

$$= \left[-5e^{-y/5}\right]_1^2 = 5\left(e^{-1/5} - e^{-2/5}\right) \approx 0.74$$