Tentamen i Kösystem, 26 maj 2014

Tillåtna hjälpmedel: räknedosa, formelsamling

Formel för anropsspärr:

$$P(\text{spärr}) = \frac{\lambda_M p_M}{\sum_{i=0}^{M} \lambda_i p_i} \text{ där } M \text{ är antalet platser i systemet}$$

Uppgift 1

Ett kösystem består av två betjänare och tre köplatser. Antag att ankomstintensiteten till systemet är en poissonprocess med ankomstintensiteten $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$ och att betjäningstiden är exponentialfördelad med medelvärdet 0.2 s det vill säga $\mu = 5 \text{ s}^{-1}$.

a) Rita en Markovkedja som beskriver kösystemet.
b) Beräkna tillståndsannolikheterna.
c) Beräkna sannolikheten att en kund som anländer till systemet spärras.
d) Hur många betjänare är i medeltal upptagna?
e) Antag att $\lambda \to \infty$. Vad blir då medeltiden i systemet för en kund som ej spärras?

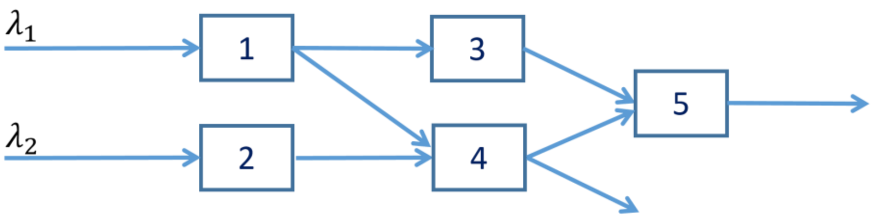
Uppgift 2

En server som används i ett företag kan beskrivas som ett kösystem med ett ändligt antal kunder. Antag att det finns 5 kunder och att kösystemet har en bejänare och tre köplatser. Varje ledig kund genererar anrop till servern med intensiteten $\beta = 1$ per minut. Medelbetjäningstiden är 1 minut.

a) Vad blir sannolikheten att en kund spärras (anropsspärren)?
b) Vad blir medeltiden i systemet för en kund som inte spärras?
c) Hur många betjänas per timme?
d) Hur stor är belastningen på betjänaren? Belastning = P(en betjänare är upptagen)

Uppgift 3

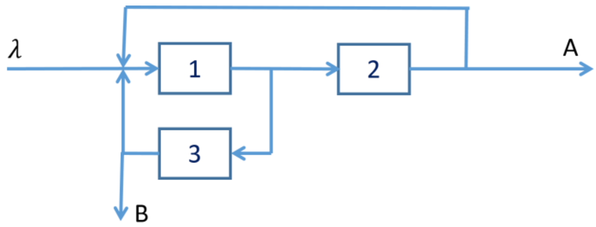
Följande könät beskriver en webbserver:



Noderna i nätet (fyrkanterna) är M/M/1-system. Vi antar att $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 10$. Betjäningsintensiteterna i noderna är $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 20$, $\mu_3 = 20$, $\mu_4 = 20$ och $\mu_5 = 20$. Sannolikheten att en kund som är färdig i nod 1 fortsätter till nod 3 är 0,4 och att den fortsätter till nod 4 är 0,6. Sannolikheten att en kund som lämnar nod 4 fortsätter till nod 5 är 0,5 och sannolikheten att den lämnar könätet är 0,5.

a) Hur lång tid tillbringar i medeltal en godtycklig kund i könätet?
b) Vad är medeltiden i könätet för en kund som lämnar könätet via nod 5?
c) Hur lång tid tillbringar en godtycklig kund i medeltal med att vänta under sin tid i könätet?
d) Antag att $\lambda_1 \to \infty$. Vad blir då medelantal kunder i nod 3?

Uppgift 4



I könätet ovan är noderna är M/M/1-system. Sannolikheten att en kund som lämnar nod 1 fortsätter till nod 2 är 0,5 och sannolikheten att kunden fortsätter till nod 3 är 0,5. Sannolikheten att en kund som lämnar nod 2 fortsätter till nod 1 är 0,8 och att den lämnar könätet är 0,2. Sannolikheten att en kund som lämnar nod 3 går till nod 1 är 0,5 och sannolikheten att den lämnar könätet är 0,5. Alla betjäningstider har medelvärdet 1. Vi förutsätter att λ är så litet att ingen av noderna är överbelastad.

a) Vad är sannolikheten att en kund lämnar könätet i punkten A respektive B?
b) Hur lång tid tillbringar i medeltal en kund i könätet? Svaret ska innehålla λ.
c) I medeltal, hur många gånger besöker en kund nod 1, 2 respektive 3 under sin tid i könätet?
d) Antag att det får finnas maximalt en kund totalt i könätet. Finns redan en kund i någon av noderna vid ankomst spärras den ankommande kunden. Vad blir då medelantal kunder i de olika noderna? Ledning: rita en Markovkedja där tillstånd 0 betyder tomt system och tillstånd i betyder att en kund finns i nod i.

Uppgift 5

För att lösa denna uppgift är följande formel för M/G/1-system bra att använda:

$$N = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)}$$

N är medelantalet kunder i hela systemet. Antag att en server modelleras som ett M/G/1-system. Mätningar visar att variansen för betjäningstiden är 0,01 s^2, att medelbetjäningstiden är 0,1 s och att antalet ankomster per sekund i medeltal är 8.

a) Beräkna medeltiden som en kund tillbringar i köystemet.
b) Vad är sannolikheten att betjänaren är upptagen?
c) Vilken betjäningstidsfördelning ger den minsta medelväntetiden i ett M/G/1-system? Motivera!

Uppgift 6

Ett mycket litet callcenter modelleras som två betjänare och en kö med två platser. Kunder anländer i enlighet med en Poissonprocess med intensiteten $\lambda = 1$ per minut och betjäningstiderna är exponentialfördelade med medelvärde 2 minuter. När en kund står i kön så finns risken att kunden tröttnar och lämnar kön. Antag att en köande kund lämnar kön med intensiteten $\beta = 1$ per minut.

a) Rita en markovkedja som beskriver kösystemet.
b) Beräkna medelantal upptagna betjänare.
c) Beräkna hur många som i medeltal blir betjänade per tidsenhet.
d) Beräkna hur många kunder som i medeltal ger upp per tidsenhet.
e) Beräkna medeltiden i systemet för en kund som har betjänats och som anlände när det redan fanns tre kunder i kösystemet.