Tentamen i Kösystem (ETS075) 27 maj 2013, 08-13

- Tillåtna hjälpmedel: räknedosa, utdelad formelsamling, Tefyma
- Förklara tydligt hur Du löser en uppgift! Varje problem ger maximalt 10 poäng.

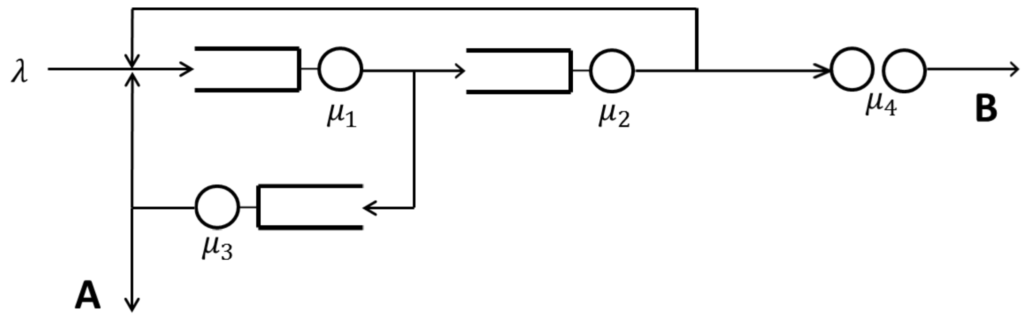
Problem 1: Antag att vi kan modellera en webb-sajt med två servrar som
ett M/M/2-system med fyra köplatser. Jobb ankommer till systemet i enlighet med en Poissonprocess (λ) och betjäningstiden är exponentialfördelad med intensiteten μ.

a) Rita systemets markovkedja.
b) Beräkna tillståndssannolikheterna.
c) Låt $\lambda = 3\ s^{-1}$ samt $\mu = 2\ s^{-1}$. Hur många jobb blir färdigbetjänade per minut?
d) Beräkna medelväntetiden givet värdena på λ och μ i uppgift c.

Problem 2: Till ett M/M/4 system med 1 köplats har endast 8 kunder tillgång till systemet. Med intensiteten β genererar varje kund en ankomst, men endast då det inte finns något jobb från den kunden i systemet. Antag att medelbetjäningstiden är 0.1 sekunder samt att $\beta = 1\ s^{-1}$

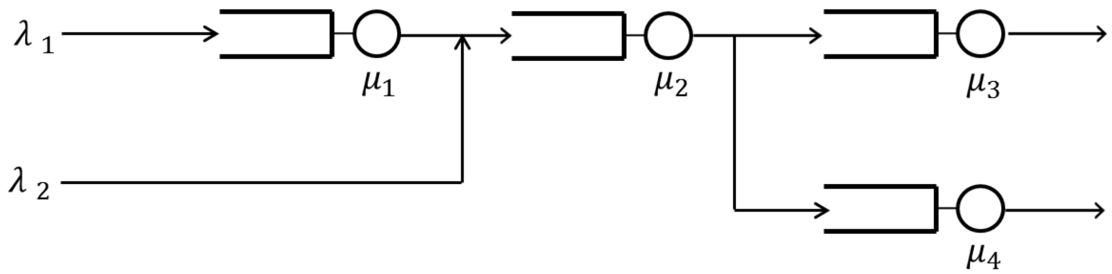
a) Vad är sannolikheten för att exakt 7 av kunderna inte befinner sig i kösystemet?
b) Bestäm anropsspärren samt hur många jobb som i medeltal blir spärrade per minut?
c) Bestäm medelväntetiden för de kunder som kommer in i systemet.
d) Bestäm medelantalet kunder i betjänarna.

Problem 3: För könätet i figuren nedan gäller: $\lambda = 2\ s^{-1}$, $\mu_1 = 6\ s^{-1}$, $\mu_2 = 4\ s^{-1}$, $\mu_3 = 4\ s^{-1}$, $\mu_4 = 5\ s^{-1}$. Sannolikheten att en kund som lämnar nod 1 går till nod 3 är 0.5, sannolikheten att en kund som lämnar nod 2 går till nod 4 är 0.2 samt sannolikheten för att en kund som lämnar nod tre går till nod 1 är 0.1. Noderna 1, 2 och 3 är alla enbetjänarsystem med ett oändligt köutrymme och nod 4 är ett tvåbetjänarsystem utan kö, dvs ett upptagetsystem. De kunder, som inte råkar ut för spärr, lämnar könätet antingen via punkt A eller via punkt B. Ankomstprocessen är en poissonprocess!



a) Beräkna medelantalet kunder i var och en av noderna.
b) Vad är sannolikheten för att en ankommande kund lämnar kösystemet efter en komplett betjäning, dvs kunder som lämnar kösystemet antingen via punkt A eller punkt B.
c) Beräkna total kötid för en godtycklig kund.
d) Hur många gånger besöker en godtycklig kund nod 1 i medeltal?

Problem 4: För könätet nedan gäller att: $\lambda_1 = 10\ s^{-1}$, $\lambda_2 = 20\ s^{-1}$, $\mu_1 = 12 s^{-1}$, $\mu_2 = 40\ s^{-1}$, $\mu_3 = 25\ s^{-1}$, $\mu_4 = 15\ s^{-1}$. Vidare bildar ankomsterna till könätet poissonprocesser samt alla betjäningstider är exponentialfördelade. En kund som lämnar kösystem 2 går till system 3 med sannolikheten 0.6.



a) Vad är medelantal kunder i var och en av noderna?
b) Om en kund lämnar könätet via nod 4, vilken tid har den i medeltal tillbringat i könätet?
c) Hur många kunder lämnar könätet per sekund?
d) Beräkna hur lång tid en kund som först kommer till kösystem 1tillbringar i systemet i medel.

Problem 5: Antag att vi har ett M/M/*m* upptagetsystem, dvs ett system utan kö.
Låt $\lambda = 6\ s^{-1}$ och medelbetjäningstiden 3 sekunder.

a) Bestäm det minimala antalet betjänare, dvs *m*, under förutsättning att spärrsannolikheten (tidsspärren) är mindre än 0.01.
b) Utgående från det värde på *m*, som Du fått i uppgift a, bestäm erbjuden, avverkad och spärrad trafik.
c) Vad blir medelantalet kunder i systemet?
d) Härled uttrycket för tillståndsfördelningen och då för ett allmänt *m*. Observera att uttrycket finns i formelsamlingen!

Problem 6: Uttrycket för medelantalet kunder i kön för ett M/G/1 system ges av

$$N_q = \frac{\lambda^2 \overline{x^2}}{2(1-\rho)}$$

a) Ge ett uttryck för medelantal kunder i betjänaren.
b) Låt ankomstintensiteten vara 5 per sekund och medelbetjäningstiden 0.1 sekunder, vad är den största variansen som betjäningstiderna kan ha utan att medelväntetiden i kön överskrider 0.5 sekunder?
c) Låt nu betjäningstidernas varians vara 5 s^2, (λ och $\bar{x}$ som i uppgift b). Vad blir medeltiden i systemet för en godtycklig kund?
d) Vilken betjäningstidsfördelning ger det största värdet på medelantalet kunder i systemet, den exponentiella eller den konstanta. Antag att betjäningstiderna för de båda fördelningarna har samma medelvärde.

Lycka till!

Ulf