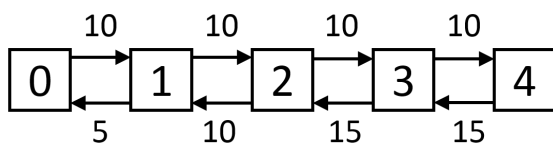


# Lösning, Kösystem 30 maj 2015

## Uppgift 1

a) Markovkedjan ser ut så här:



b) Vi ställer upp tillståndsekvationerna:

$$5p_1 = 10p_0$$

$$10p_2 = 10p_1$$

$$15p_3 = 10p_2$$

$$15p_4 = 10p_3$$

Genom att utnyttja att summan av alla sannolikheter är  $= 1$  får vi lösningen

$$p_0 = 9/65$$

$$p_1 = 18/65$$

$$p_2 = 18/65$$

$$p_3 = 12/65$$

$$p_4 = 8/65$$

c) Antalet spärrade per timme blir:

$$10 \cdot 3600 \cdot p_4 \approx 4431$$

eftersom ankomstintensiteten alltid är 10 oberoende av i vilket tillstånd kedjan befinner sig.

d) Kan beräknas med definitionen av medelvärde:

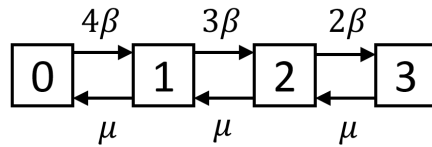
$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot (p_3 + p_4) = \frac{114}{65} \approx 1,75$$

e) Littles sats ger:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4}{10 \cdot (1 - p_4)} = \frac{122}{570} \approx 0,21$$

## Uppgift 2

a) Börja med att rita Markovkedjan:



Därefter ställer vi upp tillståndsekvationerna:

$$\mu p_1 = 4\beta p_0$$

$$\mu p_2 = 3\beta p_1$$

$$\mu p_3 = 2\beta p_2$$

Om vi sätter  $\alpha = \beta/\mu$  så får vi

$$p_1 = 4\alpha p_0$$

$$p_2 = 3\alpha^2 p_0$$

$$p_3 = 2\alpha^3 p_0$$

Att summan av alla sannolikheter ska bli = 1 ger

$$p_0 = \frac{1}{1 + 4\alpha + 12\alpha^2 + 24\alpha^3}$$

Sannolikheten för spärr blir

$$\frac{\beta p_3}{4\beta p_0 + 3\beta p_1 + 2\beta p_2 + \beta p_3} = \frac{6\alpha^3}{1 + 3\alpha + 6\alpha^2 + 6\alpha^3}$$

Om vi nu sätter in  $\beta = \mu = 0,2 \Rightarrow \alpha = 1$  så får vi att sannolikheten för spärr blir

$$\frac{6}{1 + 3 + 6 + 6} = \frac{3}{8} = 0,375$$

b) Formeln för  $\lambda_{eff}$  ger

$$\lambda_{eff} = 4\beta p_0 + 3\beta p_1 + 2\beta p_2 = p_0\beta(4 + 12\alpha + 24\alpha^2)$$

Ett alternativ:

$$\lambda_{eff} = \mu(1 - p_0)$$

Om vi nu sätter in  $\beta = \mu = 0,2 \Rightarrow \alpha = 1$  (enhet per minut på bägge) så får vi att

$$\lambda_{eff} = \frac{40}{205} \text{ per minut} = \frac{40 \cdot 60}{205} \text{ per timme} \approx 11,7 \text{ per timme}$$

c) Man använder Littles sats. Först konstaterar man att

$$E(N) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = p_0(4\alpha + 24\alpha^2 + 72\alpha^3)$$

Detta ger

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{\alpha + 6\alpha^2 + 18\alpha^3}{\beta(1 + 3\alpha + 6\alpha^2)}$$

Insättning ger nu svaret 12,5 minuter.

d) Sannolikheten blir antal per minut som kommer till ett tomt kösystem (bågen från 0 till 1) dividerat med den totala ankomstintensiteten. Det blir

$$\frac{4\beta p_0}{4\beta p_0 + 3\beta p_1 + 2\beta p_2 + \beta p_3} = \frac{1}{1 + 3\alpha + 6\alpha^2 + 6\alpha^3}$$

Insättning av  $\alpha = 1$  ger svaret 1/16.

### Uppgift 3

a) Man använder de vanliga formlerna för M/M/1-system

$$E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Det ger:

$$\begin{aligned} E(N_1) &= \frac{8}{10 - 8} = 4 \\ E(N_2) &= \frac{10}{15 - 10} = 2 \\ E(N_3) &= \frac{14}{15 - 14} = 14 \\ E(N_4) &= \frac{11}{12 - 11} = 11 \\ E(N_5) &= \frac{7}{14 - 7} = 1 \end{aligned}$$

b) Littles sats ger:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{4 + 2 + 14 + 11 + 1}{18} = \frac{16}{9} \approx 1,78$$

c) Tre vägar är möjliga:

$$\begin{aligned} A &: 1 \rightarrow 4 \quad \lambda_A = 4 \\ B &: 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \quad \lambda_B = 2 \\ C &: 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \quad \lambda_C = 2 \end{aligned}$$

För tiderna i kösystemen gäller:

$$E(T_i) = \frac{E(N_i)}{\lambda_i}$$

vilket ger:

$$E(T_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$E(T_4) = \frac{11}{11} = 1$$

$$E(T_3) = \frac{14}{14} = 1$$

$$E(T_5) = \frac{1}{7}$$

Medeltiden blir nu:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} (E(T_1) + E(T_4)) + \\ & \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} (E(T_1) + E(T_3) + E(T_4)) + \\ & \frac{\lambda_C}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} (E(T_1) + E(T_3) + E(T_5)) = \\ & = \frac{25}{14} \approx 1,79 \end{aligned}$$

d) Finns tre vägar:

$$A : 1 \rightarrow 4 \quad \lambda_A = 4$$

$$B : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \quad \lambda_B = 2$$

$$A : 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \quad \lambda_C = 5$$

Vi har också att

$$E(T_2) = \frac{1}{5}$$

Det ger

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} (E(T_1) + E(T_4)) + \\ & \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} (E(T_1) + E(T_3) + E(T_4)) + \\ & \frac{\lambda_C}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} (E(T_2) + E(T_3) + E(T_5)) = \\ & = \frac{22}{11} = 2 \end{aligned}$$

e) Kösystem 2 och 3 kommer att överbelastas. Inga andra överbelastas eftersom den maximala utintensiteten från kösystem 3 är 15.

## Uppgift 4

a) Man får ekvationssystemet:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_A + 0,2\lambda_3 \\ \lambda_2 &= \lambda_B + 0,5\lambda_1 \\ \lambda_3 &= 0,5\lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_4 &= \lambda_2\end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{10}{8}\lambda_A + \frac{2}{8}\lambda_B \\ \lambda_2 &= \frac{5}{8}\lambda_A + \frac{9}{8}\lambda_B \\ \lambda_3 &= \frac{10}{8}\lambda_A + \frac{10}{8}\lambda_B \\ \lambda_4 &= \frac{5}{8}\lambda_A + \frac{9}{8}\lambda_B\end{aligned}$$

(åtminstone så länge ingen nod är överbelastad). Insättning av  $\lambda_A = \lambda_B = 4$  ger sedan

$$\begin{aligned}E(N_1) &= \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{6}{12 - 6} = 1 \\ E(N_2) &= \frac{7}{14 - 7} = 1 \\ E(N_3) &= \frac{10}{20 - 10} = 1 \\ E(N_4) &= \frac{7}{14 - 7} = 1\end{aligned}$$

Medeltiden i systemet för en godtycklig kund blir då:

$$E(T) = \frac{\sum E(N_i)}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{1}{2}$$

b) För en godtycklig kund blir det:

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{10}{8} = 1,25$$

c) Från kösystem 3 kan det komma maximalt  $0,2\mu_3 = 4$ . Det ger

$$\lambda_A + 4 < \mu_1 \Rightarrow \lambda_A < 8$$

d) Om man ser på lösningen till ekvationssystemet i a-delen av uppgiften så ser man att medelantalet gånger en kund som kommer via kösystem 1 passerar nod  $i$  är koefficienten framför  $\lambda_A$  i lösningen för  $\lambda_i$ . Det ger svaret

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{E(N_1)}{\lambda_1} + \frac{5}{8} \cdot \frac{E(N_2)}{\lambda_2} + \frac{10}{8} \cdot \frac{E(N_3)}{\lambda_3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{E(N_4)}{\lambda_4} = 0,51$$

## Uppgift 5

- a) Beräkna först medelvärde och andramoment av betjäningstiden:

$$\frac{df^*}{ds} = -0,5e^{-s} - 1,5e^{-3s} \rightarrow -2 \text{ då } s \rightarrow 0 \Rightarrow E(X) = 2$$

$$\frac{d^2 f^*}{ds^2} = 0,5e^{-s} + 4,5e^{-3s} \rightarrow 5 \text{ då } s \rightarrow 0 \Rightarrow E(X^2) = 5$$

Det ger att  $\rho = \lambda E(X) = 0,4 \cdot 2 = 0,2$  Insättning i formel ger nu:

$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)} = 0,8 + \frac{0,5^2 \cdot 5}{2(1-0,8)} = 2,8$$

- b) Man subtraherar medelbetjäningstiden från medeltiden i hela kösystemet:

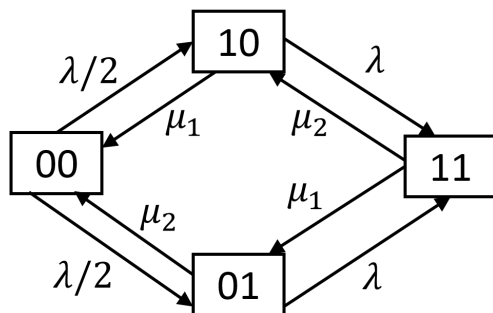
$$\frac{E(N)}{\lambda} - E(X) = 5$$

- c) Man får ekvationen

$$E(X) + \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} < 3 \Rightarrow 2 + \frac{\lambda \cdot 5}{2(1-2\lambda)} < 3 \Rightarrow \lambda < \frac{2}{9}$$

## Uppgift 6

- a) Markovkedjan ser ut så här:



- b) Eftersom bägge betjänarna då alltid kommer att arbeta blir det  $\mu_1 + \mu_2$ .  
 c) Flöde-in flöde-ut ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2p_{00} &= 2p_{10} + p_{01} \\ 4p_{10} &= p_{00} + p_{11} \\ 3p_{11} &= 2p_{10} + 2p_{01} \\ 3p_{01} &= p_{00} + 2p_{11} \end{aligned}$$

som kompletterat med  $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$  har lösningen

$$\begin{aligned} p_{00} &= \frac{2}{7} \\ p_{01} &= \frac{2}{7} \\ p_{10} &= \frac{1}{7} \\ p_{11} &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Eftersom ankomstintensiteten alltid är  $\lambda$  oberoende av tillstånd så blir spärrsannolikheten

$$p_{11} = \frac{2}{7}$$

d) Enklast är att använda Littles sats:

$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - p_{11}) = \frac{10}{7}$$

$$E(N) = 1 \cdot (p_{01} + p_{10}) + 2 \cdot p_{11} = 1$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{7}{10}$$

e) Utintensitet från betjänare 1:

$$\mu_1(p_{10} + p_{11}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{6}{7}$$

Från betjänare 2:

$$\mu_2(p_{01} + p_{11}) = 1 \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}$$

Observera att summan av dessa båda blir  $\lambda_{eff}$ .