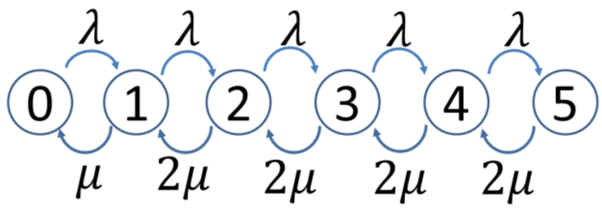
Lösningsförslag, Kösystem 26 maj 2014

Uppgift 1

a.

Markovkedjan ser ut så här:



b.

Snittmetoden ger:

$$10p_0 = 5p_1 \Rightarrow p_1 = 2p_0$$
$$10p_1 = 10p_2 \Rightarrow p_2 = p_1 = 2p_0$$
$$10p_2 = 10p_3 \Rightarrow p_3 = p_2 = 2p_0$$
$$10p_3 = 10p_4 \Rightarrow p_4 = p_3 = 2p_0$$
$$10p_4 = 10p_5 \Rightarrow p_5 = p_4 = 2p_0$$

Summan av alla sannolikheter måsta vara = 1 vilket ger

$$p_0 + 2p_0 + 2p_0 + 2p_0 + 2p_0 + 2p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{11}$$

c.

Anropsspärren blir

$$\frac{\lambda_5 p_5}{\sum_{i=0}^{5} \lambda_i p_i} = \frac{\lambda p_5}{\sum_{i=0}^{5} \lambda p_i} = \frac{p_5}{\sum_{i=0}^{5} p_i} = p_5 = \frac{2}{11}$$

d.

Man kan använda definitionen av medelvärde:

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot (p_2 + p_3 + p_4 + p_5) = 9 \cdot 2p_0 = \frac{18}{11}$$

Man kan också använda Littles sats:

$$\lambda_{\text{eff}} \cdot E(X) = \sum_{i=4}^{4} \lambda_i p_i \cdot E(X) = \lambda \cdot (p_0 + p_1 + p_2 + p_4) \cdot E(X) = \lambda(1 - p_5)E(X)$$

$$= 10 \cdot \left(1 - \frac{2}{11}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{18}{11}$$

e.

En kund som inte spärras hamnar nästan alltid i den sista köplatsen. Först får kunden vänta på att tre av kunderna som är före den (i kön eller i betjänarna) ska bli färdiga. Det tar i snitt tiden

$$3 \cdot \frac{1}{2\mu}$$

Därefter ska kunden själv betjänas. Det tar i medeltal

$$\frac{1}{\mu}$$

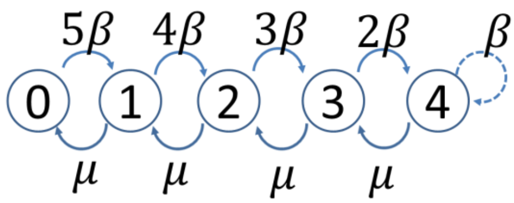
Den sammanlagda tiden blir således

$$3 \cdot \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

Uppgift 2

a.

Markovkedjan för systemet ser ut så här:



Snittmetoden ger

$$\begin{aligned}
&5p_0 = p_1 \Rightarrow p_1 = 5p_0 \\
&4p_1 = p_2 \Rightarrow p_2 = 4 \cdot 5p_0 = 20p_0 \\
&3p_2 = p_3 \Rightarrow p_3 = 3 \cdot 20p_0 = 60p_0 \\
&2p_3 = p_4 \Rightarrow p_4 = 2 \cdot 60p_0 = 120p_0
\end{aligned}$$

Summan av alla sannolikheter är = 1 vilket ger

$$p_0(1 + 5 + 20 + 60 + 120) = 1 \;\Rightarrow p_0 = \frac{1}{206}$$

Sannolikheten för spärr blir nu

$$\frac{\lambda_4 p_4}{\sum_{i=0}^{4} \lambda_i p_i} = \frac{1 \cdot 120p_0}{5 \cdot p_0 + 4 \cdot 5p_0 + 3 \cdot 20p_0 + 2 \cdot 60p_0 + 1 \cdot 120p_0} = \frac{120}{325} \approx 0{,}37$$

b.

Beräkna först medelantalet kunder i systemet:

$$N = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 \; = 705p_0$$

Sedan beräknar vi

$$\lambda_{\text{eff}} = \mu \cdot P(\text{upptagen betjänare}) = 1 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 205p_0$$

Sedan ger Littles sats:

$$T = \frac{N}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{705}{205} \approx 3.44$$

c.

Det enda som behövs är att förvandla λ_{eff} från per minut till per timme, det är bara att multiplicera med 60 Svaret blir då

$$60 \cdot 205p_0 = 60 \cdot \frac{205}{206} = 59{,}71$$

per timme.

d.

$$\lambda_{\text{eff}} \cdot E(X) = \frac{205}{206} \approx 99{,}5\ \%$$

Uppgift 3

a.

Börja med att beräkna medelantal kunder i de olika noderna:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{5}{6} \Rightarrow N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 5$$
$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{10}{20} \Rightarrow N_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = 1$$
$$\rho_3 = \frac{0{,}4\lambda_1}{\mu_3} = \frac{2}{20} \Rightarrow N_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = \frac{1}{9}$$
$$\rho_4 = \frac{\lambda_2 + 0{,}6\lambda_1}{\mu_4} = \frac{13}{20} \Rightarrow N_4 = \frac{\rho_4}{1-\rho_4} = \frac{13}{7}$$
$$\rho_5 = \frac{0{,}5 \cdot (\lambda_2 + 0{,}6\lambda_1) + 2}{\mu_5} = \frac{17}{40} \Rightarrow N_5 = \frac{\rho_5}{1-\rho_5} = \frac{17}{23}$$

Därefter använder vi Littles sats:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{5} N_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \approx 0{,}58$$

b.

Det finns tre vägar för kunder som lämnar nätet via nod 5:

$A: 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$
$B: 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$
$C: 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$

Antal kunder per tidsenhet som tar dessa vägar är

$\lambda_A = 0{,}4\lambda_1 = 2$
$\lambda_B = 0{,}5 \cdot 0{,}4\lambda_1 = 1{,}5$
$\lambda_C = 0{,}5\lambda_2 = 5$

Medeltiden som en kund tillbringar i en nod är

$$T_i = \frac{N_i}{\lambda_i}$$

I vårt fall blir det

$T_1 = 1$
$T_2 = 1/10$
$T_3 = 1/18$
$T_4 = 1/7$
$T_5 = 2/23$

Om vi sätter $\lambda = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C$ så blir medeltiden

$$\frac{\lambda_A}{\lambda} \cdot (T_1 + T_3 + T_5) + \frac{\lambda_B}{\lambda} \cdot (T_1 + T_4 + T_5) + \frac{\lambda_C}{\lambda} \cdot (T_2 + T_4 + T_5) \approx 0{,}68$$

c.

Littles sats ger oss resultatet

$$\frac{\sum N_i - \sum \rho_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \approx 0{,}41$$

d.

Nod 1 blir överbelastad så utintensiteten från noden blir μ_1. Ankomstintensiteten till nod 3 blir då

$$\lambda_3 = 0{,}6\mu_1 = 2{,}4$$

Det ger

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{3}{25} \Rightarrow N_3 = \frac{\rho_3}{1 - \rho_3} = \frac{3}{22} \approx 0{,}14$$

Uppgift 4

a.

Ställ upp ett ekvationssystem för ankomstintensiteterna till noderna:

$\lambda_1 = \lambda + 0{,}8\lambda_2 + 0{,}5\lambda_3$
$\lambda_2 = 0{,}5\lambda_1$
$\lambda_3 = 0{,}5\lambda_1$

Detta har lösningen

$$\lambda_1 = \frac{20\lambda}{7}$$

$$\lambda_2 = \frac{10\lambda}{7}$$
$$\lambda_1 = \frac{10\lambda}{7}$$

Nu beräknar vi intensiteten med vilken kunder lämnar nätet i punkt A respetive B:

$$\lambda_A = 0{,}2\lambda_2 = \frac{2\lambda}{7}$$
$$\lambda_B = 0{,}5\lambda_3 = \frac{5\lambda}{7}$$

Sannolikheten att lämna via punkt A blir då

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{2}{7}$$

och via B

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{5}{7}$$

b.

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{20\lambda}{7} \Rightarrow N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{20\lambda}{7-20\lambda}$$
$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{10\lambda}{7} \Rightarrow N_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{10\lambda}{7-10\lambda}$$
$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{10\lambda}{7} \Rightarrow N_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = \frac{10\lambda}{7-10\lambda}$$

Medeltiden i systemet blir då

$$\frac{N_1 + N_2 + N_3}{\lambda} = \frac{20}{7-20\lambda} + \frac{20}{7-10\lambda}$$

c.

Medelantal besök i nod 1:

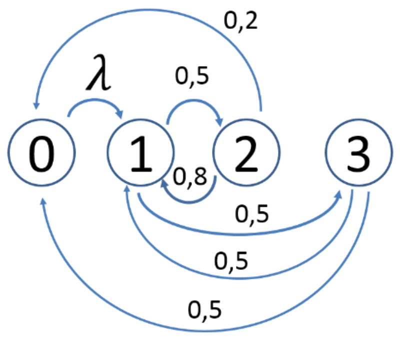
$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{20}{7}$$

Medelantal besök i nod 2 och 3:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{\lambda_3}{\lambda} = \frac{10}{7}$$

d.

Markovkedjan ser ut så här:



Ekvationer för flöde-in-flöde-ut ser ut så här:

$$\lambda p_0 = 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3$$
$$(0{,}5 + 0{,}5)p_1 = \lambda p_0 + 0{,}8p_2 + 0{,}5p_3$$
$$(0{,}2 + 0{,}8)p_2 = 0{,}5p_1$$
$$(0{,}5 + 0{,}5)p_3 = 0{,}5p_1$$

Dessa ekvationer har lösningen

$$p_0 = \frac{0{,}7}{0{,}7 + 4\lambda}$$
$$p_1 = \frac{2\lambda}{0{,}7 + 4\lambda}$$
$$p_2 = \frac{\lambda}{0{,}7 + 4\lambda}$$
$$p_3 = \frac{\lambda}{0{,}7 + 4\lambda}$$

Medelantal kunder i nod i blir nu

$$N_i = 0 \cdot (1 - p_i) + 1 \cdot p_i = p_i$$

Uppgift 5

a.

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 0{,}01 + 0{,}1^2 = 0{,}02$$

Insättning i formel och användning av Littles sats ger nu att

$$T = \frac{N}{\lambda} = E(X) + \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} = 0{,}1 + \frac{0{,}8 \cdot 0{,}02}{2 \cdot (1 - 0{,}8)} = \frac{1}{2}$$

b.

Medelantal kunder blir enligt Littles sats tillämpad på betjänaren

$$N_s = \lambda \cdot E(X) = \rho = 0{,}8$$

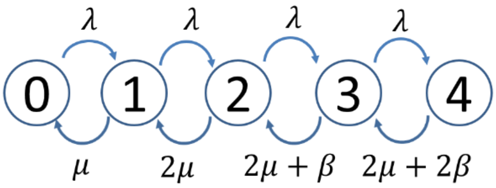
c.

Den minsta tiden får man när $E(X^2)$ är så liten som möjligt, vilket inträffar när variansen är = 0. Således den deterministiska fördelningen.

Uppgift 6

a.

Markovkedjan ser ut så här:



b.

Ekvationerna (med insatta värden på λ, μ och β) blir

$$p_0 = 0{,}5p_1$$
$$p_1 = p_2$$
$$p_2 = 2p_3$$
$$p_3 = 3p_4$$

Om man utnyttjar att summan av alla sannolikheter ska vara = 1 så blir lösningen

$$p_0 = \frac{3}{19}$$
$$p_1 = \frac{6}{19}$$
$$p_2 = \frac{6}{19}$$
$$p_3 = \frac{3}{19}$$
$$p_4 = \frac{1}{19}$$

Enligt definitionen av medelvärde blir medelantal upptagna betjänare

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot (p_2 + p_3 + p_4) = \frac{26}{19} \approx 1{,}37$$

Observera att man inte kan använda Littles sats med antal som får komma in i systemet. En del av de som kommer in i systemet ger ju upp redan innan de kommer fram till betjänarna.

c.

$$2\mu \cdot (p_2 + p_3 + p_4) + \mu \cdot p_1 = \frac{13}{19} \approx 0{,}68$$

d.

$$\beta \cdot p_3 + 2\beta \cdot p_4 = \frac{5}{19} \approx 0{,}26$$

e.

Först ska en kund framför den ”märkta” kunden försvinna, detta sker med intensiteten $2\mu + \beta$. Därefter ska en kund betjänas färdigt, detta sker med intensiteten 2μ. Sedan ska den märkta kunden själv betjänas, den intensiteten är μ. Den sammanlagda medeltiden för detta blir

$$\frac{1}{2\mu + \beta} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$