Tentamen i

Kösystem (ETS075)

4 juni 2010, 08–13.

Department of Electrical and Information Technology
Lund University

- Tillåtna hjälpmedel: räknedosa, utdelad formelsamling, allmän formelsamling som till exempel Tefyma.
- Förklara tydligt hur du löser en uppgift, samt använd metoder du lärt dig i kursen.

Problem 1: Ett kösystem har en köplats och tre betjänare. Kunder kommer till systemet i enlighet med en Poissonprocess med intensiteten 1.5 per sekund, och betjäningstiden är exponentialfördelad med medelvärdet 2 sekunder.

a) Rita systemets markovkedja.

b) Beräkna tillståndssannolikheterna.

c) Hur många kunder blir i medeltal betjänade per minut?

d) Hur lång tid har kunder som blivit betjänade fått vänta i kön i medel?

(10 poäng)

Problem 2: Antag att vi modellerar en server som ett M/M/2 system med 2 köplatser. Antalet kunder är fyra, och varje kund genererar intensiteteten β jobb per sekund, $\beta = 1s^{-1}$. Medelbetjäningstiden är 0.5 sekunder.

a) Hur många betjänare är i medeltal upptagna?

b) Bestäm tidsspärr och anropsspärr.

c) Hur stor del av tiden är bägge betjänarna upptagna i medel?

d) Bestäm den avverkade trafiken.

(10 poäng)

Problem 3: Antag ett M/M/1 system med ankomstintensiteten λ och betjäningsintensiteten μ.

a) I en tillämpning har man funnit att i medel är den totala tiden i systemet för ett jobb lika med $12.5/\mu$, och detta anser man vara en oacceptabelt lång tid. I ett försök att förbättra situationen ökar man betjäningsintensiteten från μ till μ_1, där $\mu_1 = 2\mu$.

i) Beräkna hur stor medeltiden i systemet nu blir, och jämför med det ursprungliga värdet.

ii) Beräkna medelantalet jobb i systemet då betjäningsintensiteten är μ respektive $\mu_1 = 2\mu$.

b) I en tillämpning krävs att medelantalet jobb i kön ej överstiger 2. Beräkna vad detta innebär för den avverkade trafiken, samt för medeltiden i systemet.

c) I a) fördubblades betjäningstiden i ett försök att förbättra M/M/1 systemets prestanda. Här undersöker vi istället ett M/M/2 system med betjäningsintensiteten μ. För detta system gäller att:

$\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)p_k = \rho^3/(4-\rho^2)$

där $\rho = \lambda/\mu$ och p_k är tillståndssannolikheterna, k=0,1,2,...

i) Beräkna medeltiden för ett jobb i M/M/2 systemet ovan uttryckt i parametrarna λ och μ. Vad blir medeltiden om samma λ och μ som i deluppgift a) används?

ii) Beräkna medelantalet jobb i kö för M/M/2 systemet ovan om samma λ och μ som i deluppgift a) används? Jämför med vad M/M/1 systemet med $\mu_1 = 2\mu$ ger för värde?

iii) Vilka slutsatser drar du baserat på svaren till deluppgifterna ai) ci) och cii)?

(10 poäng)

Problem 4: För könätet nedan gäller att $\lambda_1 = 3\ s^{-1}$, $\lambda_2 = 2\ s^{-1}$, $\mu_1 = 4\ s^{-1}$, $\mu_2 = 2.5\ s^{-1}$, $\mu_3 = 4\ s^{-1}$ och $\mu_4 = 5\ s^{-1}$.

Noderna 1, 2 och 4 är M/M/1 system. För nod 3, som är ett M/M/1 system med $K = 4096$ köplatser, har man via mätningar funnit att sannolikheten att systemet är tomt är lika med x, samt att sannolikheten att systemet är fullt är lika med y.

Värdena x och y får användas i lösningarna.

En kund som lämnar nod 1 fortsätter med sannolikheten β till nod 3.

a) Beräkna medelantalet kunder i noderna 1, 2 och 4 om $\beta = 1/4$.

b) Betrakta kunder som lämnar könätet via nod 4:

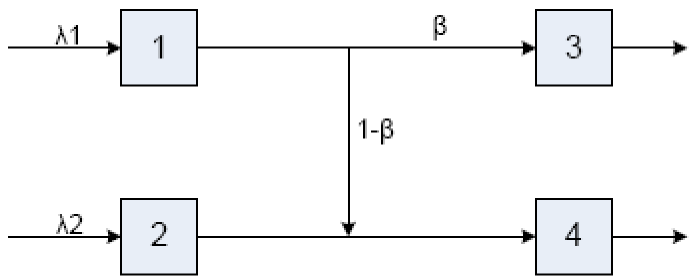
i) Hur lång tid har de i medel tillbringat i könätet om $\beta = 1/4$?

ii) Hur lång tid har de i medel tillbringat i kö om $\beta = 1/4$?

c) Hur stor del av de som får full betjäning lämnar könätet via nod 4 om $\beta = 1/4$?

d) Bestäm β uttryckt i x och y.

(10 poäng)



Problem 5: Betrakta könätet nedan. Kunder kommer till könätet i enlighet med en Poissonprocess med intensiteten $\lambda = 2$ per sekund. Noderna 1, 2, 3 är M/M/1 system med medelbetjäningstider 0.2 sek, 0.1 sek och 0.3 sek, respektive.

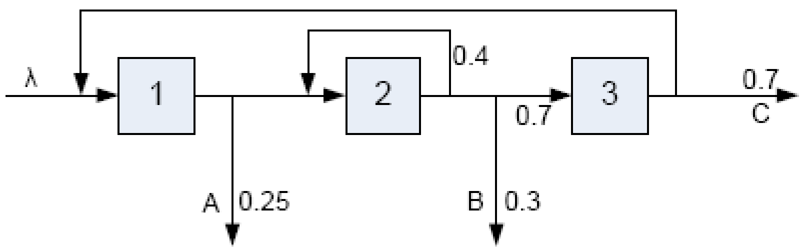
Kunder som är färdigbetjänade i nod 1 lämnar könätet (via A) med sannolikheten 0.25. Kunder som är färdigbetjänade i nod 2 återkopplas med sannolikheten 0.4. Kunder som är färdigbetjänade i nod 2 och som ej återkopplas, lämnar könätet (via B) med sannolikheten 0.3 eller går till nod 3 med sannolikheten 0.7. Kunder som är färdigbetjänade i nod 3 lämnar könätet (via C) med sannolikheten 0.7.

a) Beräkna medeltiden som en godtycklig kund tillbringar i könätet.

b) Vad är sannolikheten att en kund som lämnat systemet lämnade via A, respektive via B?

c) Kunder som lämnar systemet via A, B, eller C har tillbringat olika lång tid i medel i könätet. Beräkna den längsta av dessa tre medeltider och jämför med svaret till a).

(10 poäng)



Problem 6: Här undersöker vi ett M/G/1 system. I detta problem är ankomstintensiteten 10 s^{-1} och medelbetjäningstiden 0.05 sekunder. För ett M/G/1 system gäller att

$N = \rho + \lambda^2 E(X^2)/(2(1-\rho))$

där N är medelantal kunder i kösystemet.

a) Antag att betjäningstiden för varje jobb är lika med 0.05 sekunder. Hur lång tid får kunder då vänta i kön i medel?

b) En person påstår att medeltiden i kön aldrig är mindre än 0.02 sekunder, oavsett vilken frekvensfunktion som gäller för betjäningstiden.

Avgör om personen har rätt eller fel.

c) Hur lång tid får kunder vänta i medel i kön om betjäningstidens frekvensfunktion är konstant inom intervallet $0 \le x \le 0.1$, och lika med 0 utanför detta intervall.

(10 poäng)