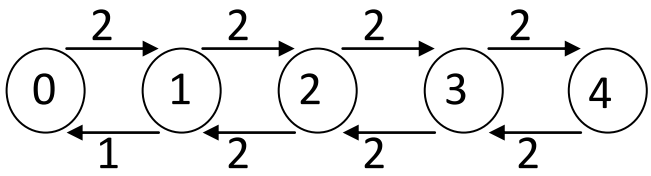
Lösningar Kösystem mars 2009

Uppgift 1

a) Först ritar vi en Markovkedja:



Snittmetoden ger sedan:

$p_1 = 2p_0$
$2p_2 = 2p_1 \Longrightarrow p_2 = 2p_0$
$2p_3 = 2p_2 \Longrightarrow p_3 = 2p_0$
$2p_4 = 2p_3 \Longrightarrow p_4 = 2p_0$

Summan av alla sannolikheter måste vara = 1. Det ger

$$p_0(1 + 2 + 2 + 2 + 2) = 1 \Longrightarrow p_0 = \frac{1}{9}$$

b) Vi använder definitionen av medelvärde. Det ger oss att medelvärdet blir:

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot (p_2 + p_3 + p_4) = \frac{14}{9}$$

c) Vi använder Littles sats:

$$\lambda_{eff} = 2(1 - p_4) = \frac{14}{9}$$

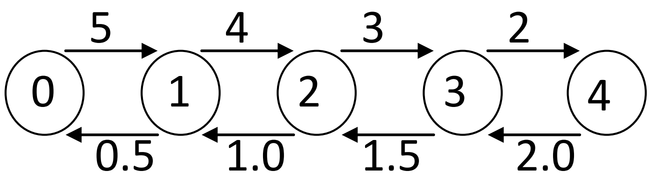
$$N = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 = \frac{20}{9}$$

$$T = \frac{N}{\lambda_{eff}} = \frac{10}{7}$$

d) Eftersom systemet är ändligt så kan kölängden inte gå mot oändligheten. Således är systemet stabilt för alla värden på ankomstintensiteten.

Uppgift 2

a) Vi börjar med att rita Markovkedjan:



Snittmetoden ger oss sedan:

$$5p_0 = \frac{1}{2}p_1 \Longrightarrow p_1 = 10p_0$$
$$4p_1 = p_2 \Longrightarrow p_2 = 40p_0$$
$$3p_2 = \frac{3}{2}p_3 \Longrightarrow p_3 = 80p_0$$
$$2p_3 = 2p_4 \Longrightarrow p_4 = 80p_0$$

Att summan av alla sannolikheter måste vara 1 ger oss sedan

$$p_0(1 + 10 + 40 + 80 + 80 = 1 \Longrightarrow p_0 = \frac{1}{211}$$

Medelantal upptagna betjänare blir detsamma som medelantal kunder i systemet:

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 650p_0 \approx 3.081$$

b) Anropsspärren blir

$$\frac{1 \cdot p_4}{5 \cdot p_0 + 4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4} = \frac{80}{405} \approx 0.20$$

c) Medelantal som betjänas per timme är detsamma som medelantal som får komma in per timme:

$$5 \cdot p_0 + 4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 = \frac{325}{211}\ s^{-1} = \frac{3600 \cdot 325}{211}\ h^{-1} \approx 5545\ h^{-1}$$

d) Total utintensitet från tillstånd 4 är 2, vilket innebär att medeltiden tills någon blir färdig är 0.5 sekunder.

Uppgift 3

a) Vi beräknar först medelantal kunder i noderna:

$$\rho_1 = 0.9 \Longrightarrow N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 9$$
$$\rho_2 = 0.8 \Longrightarrow N_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = 4$$
$$\rho_3 = 0.5 \Longrightarrow N_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = 1$$
$$\rho_4 = 0.75 \Longrightarrow N_4 = \frac{\rho_4}{1-\rho_4} = 3$$

Littles sats ger sedan:

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{17}{3} \approx 5.7\text{ s}$$

b) Man måste använda hur många som kommer från nod 1 och 3 respektive från 2 av dem som kommer till nod 4. Gör man det så får man:

$$\frac{0.5}{2.5}(T_1 + T_3) + \frac{2}{2.5}T_2 + T_4 = 4.8\text{ s}$$

c) Vi sätter:

λ_A = intensiteten med vilken kunder lämnar nätet direkt från nod 3

λ_B = intensiteten med vilken kunder lämnar nätet efter att ha blivit betjänade i nod 4

Vi beräknar dessa intensiteter:

$\lambda_A = 0.5$

$\lambda_B = 2.5(1 - E_3(0.75)) \approx 2.4163$

Sedan blir svaret:

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}(T_1 + T_3) + \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\left(\frac{0.5}{2.5}(T_1 + T_3) + \frac{2}{2.5}T_2 + T_4\right) \approx 4.95$$

Uppgift 4

a) Först beräknar vi alla ankomstintensiteter. Vi får ekvationssystemet

$$\lambda_1 = \lambda + 0.2\lambda_3$$
$$\lambda_2 = \lambda_1 + 0.2\lambda_2$$
$$\lambda_3 = 0.5\lambda_2$$

Lösningen blir

$$\lambda_2 = \frac{10\lambda}{7}$$
$$\lambda_3 = \frac{5\lambda}{7}$$
$$\lambda_1 = \frac{8\lambda}{7}$$

Därefter beräknar vi belastningarna

$$\rho_1 = \frac{16\lambda}{7}$$
$$\rho_2 = \frac{30\lambda}{7}$$
$$\rho_3 = \frac{5\lambda}{7}$$

Vi ser att nod 2 är hårdast belastad. Den är stabil om

$$\rho_2 < 1 \Rightarrow \frac{30\lambda}{7} < 1 \Rightarrow \lambda < \frac{7}{30}$$

b) Svaret blir

$$\frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda}x_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda}x_3 = \frac{51}{7}$$

c) Littles sats ger svaret:

$$\frac{N_1 + N_2 + N_3}{\lambda} = \frac{16}{7 - 16\lambda} + \frac{30}{7 - 30\lambda} + \frac{5}{7 - 5\lambda}$$

d) Sannolikheten blir

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda} = \frac{0.3\lambda_2}{\lambda} = \frac{3}{7}$$

Uppgift 5

a) Eftersom betjäningstiderna är deterministiska så gäller

$E(X^2) = E^2(X) = 0.08^2$

Vidare så är $\rho = \lambda E(X) = 0.8$. Insättning ger nu

$$T = 0.08 + \frac{10 \cdot 0.08^2}{2(1 - 0.8)} = 0.24 \text{ s}$$

b) Vi har att

$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = V(X) + 0.08^2$

Det ger olikheten

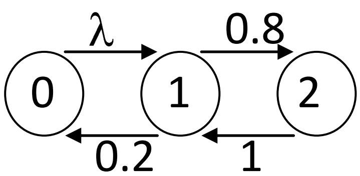
$$0.08 + \frac{(V(X) + 0.08^2) \cdot 10}{2(1 - 0.8)} < 1 \Rightarrow V(X) < 0.0304$$

c) Låt oss kalla tiden från det att betjänaren blir ledig till den blir upptagen igen för W. Det är en stokastisk variabel som är exponentialfördelad med medelvärde 0.1. Det ger att sannolikheten att betjänaren är upptagen blir

$$\frac{E(X)}{E(X) + E(W)} = \frac{0.08}{0.1 + 0.08} = \frac{4}{9}$$

Uppgift 6

a) Vi ritar en markovkedja som beskriver könätet. 0 betyder tomt könät, 1 betyder en kund i nod 1 och 2 betyder en kund i nod 2. Så ser nätet ut så här:



Tillståndssannolikheterna beräknar man enkelt med snittmetoden, vilket ger

$$p_0 = \frac{1}{1 + 9\lambda}$$

$$p_1 = \frac{5\lambda}{1 + 9\lambda}$$

$$p_2 = \frac{4\lambda}{1 + 9\lambda}$$

Sedan får man att medelantalet kunder i könätet är

$$0 \cdot p_0 + 1 \cdot (p_1 + p_2) = \frac{9\lambda}{1 + 9\lambda}$$

b) Det blir detsamma som den effektiva ankomstintensiteten vilken blir

$$\lambda p_0 = \frac{\lambda}{1 + 9\lambda}$$

c) Vi låter ankomstintensiteten gå mot oändligheten. Det ger

$$p_1 = \frac{5\lambda}{1 + 9\lambda} \to \frac{5}{9} \text{ då } \lambda \to \infty$$

$$p_2 = \frac{4\lambda}{1 + 9\lambda} \to \frac{4}{9} \text{ då } \lambda \to \infty$$