Tentamen i Kösystem, tisdagen den 10 mars 2009

Tillåtna hjälpmedel: räknedosa, utdelad formelsamling, allmän formelsamling som till exempel Tefyma. Motivera dina räkningar.

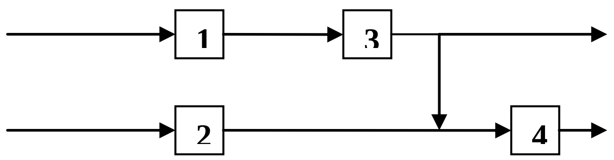
Uppgift 1
Ett kösystem har två köplatser och två betjänare. Kunder kommer i enlighet med en Poissonprocess med intensiteten 2 per sekund och betjäningstiden är exponentialfördelad med medelvärdet 1 sekund.

a) Rita en markovkedja och beräkna tillståndssannolikheterna.
b) Beräkna hur många *betjänare* som i medeltal är upptagna.
c) Hur lång tid tillbringar en kund som inte spärras i medeltal i systemet?
d) För vilka värden på ankomstintensiteten är systemet stabilt?

Uppgift 2
Ett kösystem består av fyra betjänare och inga köplatser, det vill säga det är ett upptagetsystem. Betjäningstiderna är exponentialfördelade med medelvärdet 2 sekunder. Det finns fem kunder som använder systemet. När en kund inte betjänas så är dess ankomstintensitet 1 per sekund (det vill säga $\beta = 1$).

a) Beräkna hur många betjänare som i medeltal är upptagna.
b) Beräkna hur stor sannolikheten är att en kund spärras?
c) Hur många kunder betjänas per timme i medeltal?
d) Antag att systemet är fullt det vill säga att alla betjänarna är upptagna. Hur lång tid tar det i medeltal innan någon betjänare blir ledig?

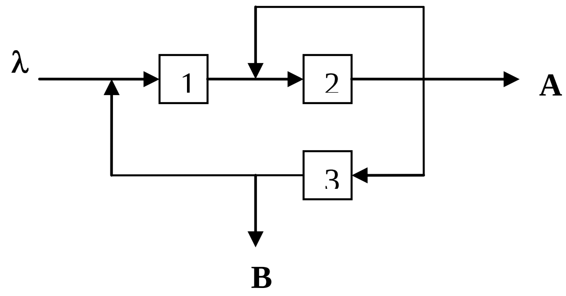
Uppgift 3
Ett könät ser ut på följande sätt:



Boxarna är M/M/1-system. Ankomstintensiteten till nod 1 är 1 per sekund, ankomstintensiteten till nod 2 är 2 per sekund. Medelbetjäningstiden är 0.9 sekunder i nod 1, 0.4 sekunder i nod 2, 0.5 sekunder i nod 3 och 0.3 sekunder i nod 4. Sannolikheten att en kund som lämnar nod 3 fortsätter till nod 4 är 0.5.

a) Beräkna medeltiden som en godtycklig kund tillbringar i könätet.
b) Vad är medeltiden i könätet för en kund som lämnar nätet genom nod 4?
c) Antag att nod 4 ersätts av ett upptagetsystem med tre betjänare. Medelbetjäningstiden är fortfarande 0.3 sekunder. Vad är medeltiden i könätet för kunder som inte spärras i nod 4?

Uppgift 4
Ett könät ser ut så här:



Medelbetjäningstiden i nod 1 är 2 sekunder, i nod 2 är den 3 sekunder och i nod 3 är den 1 sekund. Sannolikheten att en kund fortsätter till nod 3 efter att ha lämnat nod 2 är 0.5, sannolikheten att en kund återvänder till nod 2 efter att ha lämnat nod 2 är 0.2 och sannolikheten att den fortsätter till nod 1 efter att ha lämnat nod 3 är 0.2.

a) Vilken är den högsta externa ankomstintensitet som man kan ha utan att någon av noderna blir överbelastade?
b) Antag att ingen nod i könätet är överbelastad. Hur lång är då i medeltal den totala betjäningstiden i systemet för en godtycklig kund?
c) Antag att ingen nod i könätet är överbelastad. Hur lång tid tillbringar då en godtycklig kund i könätet. I ditt svar ska den externa ankomstintensiteten λ ingå.
d) Vad är sannolikheten att en kund lämnar könätet vid A?

Uppgift 5
För ett M/G/1-system gäller att $N = \rho + \dfrac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)}$ där N är medelantal kunder i kösystemet.

Betrakta ett M/G/1-system. Ankomsterna har intensiteten 10 per sekund.

a) Betjäningstiden är alltid 0.08 sekunder. Vad är medeltiden som en kund tillbringar i M/G/1-systemet?
b) Vilken är den största varians som betjäningstiden kan tillåtas om medeltiden i M/G/1-systemet ska vara mindre än 1 sekund? Vi antar att medelbetjäningstiden och ankomstintensiteten är som i a-uppgiften.
c) Antag att vi plockar bort köplatserna så att vi har ett M/G/1*upptagetsystem. Vad är sannolikheten att betjänaren är upptagen?

Uppgift 6

Betrakta könätet i figuren nedan. *Vi antar att det kan finnas maximalt en kund totalt i könätet.* Det innebär att om en kund kommer till könätet när det redan finns en kund i det så avvisas kunden. Alla betjäningstider är exponentialfördelade med medelvärde 1 s. Sannolikheten att en kund lämnar könätet efter att ha betjänats i nod 1 är 0.2 och sannolikheten att kunden i stället fortsätter till nod 2 är 0.8. Ankomsterna bildar en poissonprocess med intensitet λ per sekund.

a) Vad blir medelantal kunder i könätet? Uttryck detta i λ.
b) Hur många kunder lämnar i medeltal könätet per sekund? Uttryck detta i λ.
c) Antag att ankomstintensiteten är oändlig. Vad blir då medelantal kunder i nod 1 respektive 2?