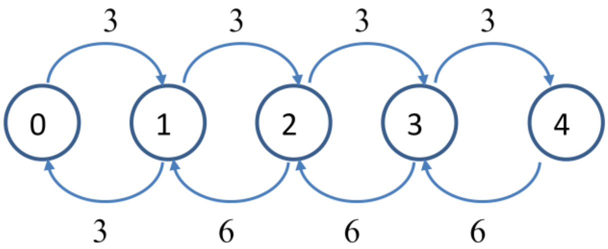
Lösningar Kösystem 7 mars 2008

Uppgift 1

a) Markovkedjan ser ut så här:



b) Vi använder som vanligt snittmetoden för att hitta tillståndssannolikheterna. Det ger

$$p_1 = p_0$$
$$6p_2 = 3p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}p_0$$
$$p_3 = \frac{1}{4}p_0$$
$$p_4 = \frac{1}{8}p_0$$

Att summan av alla sannolikheter ska vara lika med 1 ger sedan att

$$p_0 = \frac{8}{23}$$

vilket slutligen ger

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{8}{23} \\ p_1 = \dfrac{8}{23} \\ p_2 = \dfrac{4}{23} \\ p_3 = \dfrac{2}{23} \\ p_4 = \dfrac{1}{23} \end{cases}$$

c) Antal som betjänas per tidsenhet är detsamma som antal som får komma in i systemet per tidsenhet. Det ger att antal som betjänas per tidsenhet är

$$\lambda_{\text{eff}} = 3 \cdot (1 - p_4) = \frac{66}{23} \approx 2.9\ \text{s}^{-1}$$

d) Eftersom ankomstintensiteten är samma för alla tillstånd så blir spärrsannolikheten

$$p_4 = \frac{1}{23}$$

Uppgift 2

a) Medelantal kunder i noderna kan beräknas med vanliga M/M/1-formler. Det ger

$$\lambda_1 = 10 \Rightarrow \rho_1 = \frac{10}{12} \Rightarrow N_1 = \frac{10/12}{1 - 10/12} = \frac{10}{2} = 2$$

$$\lambda_2 = 10 + 20 = 30 \Rightarrow \rho_2 = \frac{30}{40} \Rightarrow N_2 = \frac{30/40}{1 - 30/40} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\lambda_3 = 30 \cdot 0.8 = 24 \Rightarrow \rho_3 = \frac{24}{25} \Rightarrow N_3 = \frac{24/25}{1 - 24/25} = \frac{24}{1} = 24$$

$$\lambda_4 = 30 \cdot 0.2 = 6 \Rightarrow \rho_4 = \frac{6}{7} \Rightarrow N_2 = \frac{6/7}{1 - 6/7} = \frac{6}{1} = 6$$

b) Man kan räkna med vägar genom könätet, då blir tiden

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{N_1}{\lambda_1} + \frac{N_2}{\lambda_2} + \frac{N_3}{\lambda_3} = \frac{38}{30} \approx 1.27\ \text{s}$$

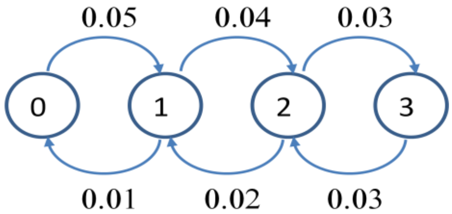
c) Man kan använda Littles sats på bara själva köutrymmena. Det ger att medeltiden som en kund tillbringar med att vänta i köerna blir

$$\frac{N_1 + N_2 + N_3 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3}{\lambda_1 + \lambda_2} \approx 1.15\ \text{s}$$

d) Om man sätter $\lambda_1 = 11.25$ så blir $\rho_3 = 1$, $\rho_1 < 1$, $\rho_2 < 1$ och $\rho_4 < 1$. Således blir nod 3 först överbelastad.

Uppgift 3

a) Observera att man inte kan använda Erlangs formel eftersom ankomstintensiteten varierar beroende på hur många kunder det finns i systemet. Det enklaste är att rita Markovkedjan och använda snittmetoden. Kedjan ser ut så här:



Observera att ankomstintensiteten när tre kanaler är upptagna är 0.02. Snittmetoden ger nu

$$0.05p_0 = 0.01p_1 \Rightarrow p_1 = 5p_0$$

$$0.04p_1 = 0.02p_2 \Rightarrow p_2 = 10p_0$$

$$0.03p_2 = 0.03p_3 \Rightarrow p_3 = 10p_0$$

Summan av alla sannolikheter ska bli =1, vilket ger

$$p_0 \cdot (1 + 5 + 10 + 10) = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{26}$$

Anropsspärren kan nu beräknas:

$$\frac{\lambda_3 p_3}{\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3} = \frac{0.02 \cdot 10p_0}{0.05 \cdot p_0 + 0.04 \cdot 5p_0 + 0.03 \cdot 10p_0 + 0.02 \cdot 10p_0} =$$

$$= \frac{20}{75} = \frac{4}{15} \approx 0.27$$

b) Medelantal spärrade per timme blir

$$\lambda_3 p_3 = 0.02 \cdot \frac{10}{26}\,\mathrm{s}^{-1} = 3600 \cdot 0.02 \cdot \frac{10}{26}\,\mathrm{h}^{-1} \approx 28\,\mathrm{h}^{-1}$$

c) Man kan använda Littles sats, det ger

$$\lambda_{\mathrm{eff}} \cdot \frac{1}{\mu} \approx 2.1$$

Man kan också använda definitionen på medelvärde och i stället räkna ut medelantal upptagna radiokanaler som

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 \approx 2.1$$

d) Nu kan vi använda erlangtabellen. Den erbjudna trafiken är $\rho = \lambda/\mu = 10$. Erlangtabellen ger sedan att det krävs minst 18 betjänare.

Uppgift 4

a) Vi börjar med att räkna ut ankomstintensiteterna till noderna. Man får:

$$\lambda_1 = \lambda + 0.5 \cdot 0.4 \cdot \lambda_1 + 0.3 \cdot \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 2\lambda = 2$$

$$\lambda_2 = 0.5\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_3 = 0.3\lambda_1 = 0.6$$

Därefter kan vi använda de vanliga formlerna för M/M/1:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 2$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow N_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = 1$$

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{0.6}{2} \Rightarrow N_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = \frac{6}{14} \approx 0.43$$

b) $\lambda_A = 0.6\lambda_2 = 0.6$

$$\lambda_B = 0.2\lambda_1 = 0.4$$

Sannolikheten att en kund lämnar könätet via A blir nu

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = 0.6$$

och sannolikheten att man lämnar könätet via B blir då 0.4 (summan av sannolikheterna måste vara =1).

c) Antal gånger man passerar nod 3 blir

$$\frac{\lambda_3}{\lambda} = 0.6$$

d) Antag att medeltiden i könätet är T_A om man lämnar nätet via A och T_B om man lämnar via B. Vi låter T vara medeltiden i könätet för en godtycklig kund. Vi får ekvationssystemet

$$T = 0.6T_A + 0.4T_B$$
$$T_2 = T_A - T_B$$

Här kan vi beräkna

$$T = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{\lambda} = \frac{24}{7}$$

och

$$T_2 = \frac{N_2}{\lambda_2} = 1$$

vilket gör att vi kan lösa ekvationssystemet och få

$$T_A \approx 3.83 \text{ s}$$

Uppgift 5

a) Vi beräknar allt som behövs för att sätta in i den givna formeln:

$$\rho = \lambda \cdot E(X) = 0.5 \cdot 1.6 = 0.8$$

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 2 + 1.6^2 = 4.54$$

Insättning i formel ger nu

$$E(T) = 1.6 + \frac{0.5 \cdot 4.56}{2(1 - 0.8)} = 7.3 \text{ s}$$

b) Efter ändringen blir $\lambda = 6 \cdot 0.5 = 3 \Rightarrow \rho = \lambda \cdot E(X) = 3 \cdot 1.6 = 4.8$. Villkoret för stabilitet är att antalet betjänare ska vara större än ρ vilket innebär att det krävs 5 betjänare.

c) Vi beräknar medelvärde och andramoment för betjäningstiden:

$$E(X) = 0.5 \cdot 1.2 + 0.5 \cdot 2 = 1.6$$

$E(X^2) = 0.5 \cdot 1.2^2 + 0.5 \cdot 2^2 = 2.72$

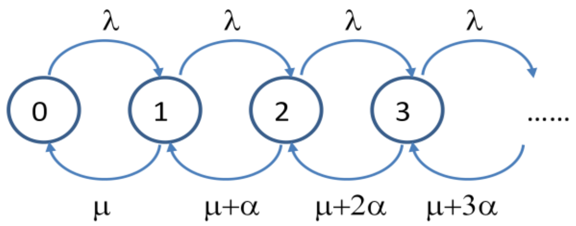
Insättning i formel ger sedan att väntetiden i M/G/1-systemet blir

$$\frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0.5 \cdot 2.72}{2 \cdot (1-0.8)} = 3.4 \text{ s}$$

Uppgift 6

a) Ju fler kunder som finns i systemet desto högre avgångsintensitet. Eftersom ökningen av avgångsintensiteten är linjär så är systemet alltid stabilt.

b) Markovkedjan för systemet ser ut så här:



Snittmetoden ger oss

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\mu + \alpha} p_1 = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu + \alpha)} p_0$$

$\vdots$

$$p_k = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\mu + (i-1)\alpha} \right) p_0$$

Att summan av alla sannolikheter ska bli = 1 ger sedan

$$p_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\mu + (i-1)\alpha} \right]^{-1}$$

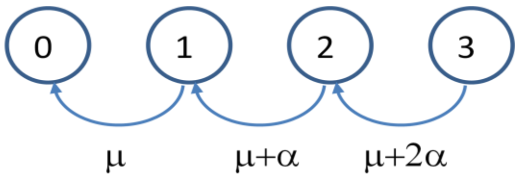
Därefter får vi

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k$$

och slutligen

$$T = \frac{N}{\lambda}$$

c) Antag att det finns två kunder i systemet när det kommer en kund. Medeltiden som den kunden tillbringar i kösystemet är densamma som medeltiden innan man kommer till tillstånd 0 i följande markovkedja om man startar i tillstånd 3:



Denna tid är

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu + \alpha} + \frac{1}{\mu + 2\alpha}$$

Om det finns k kunder i systemet vid en ankomst så är medeltiden som kunden tillbringar i systemet

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\mu + i\alpha}$$

Tar vi bort betinget på antal kunder vid en ankomst så får vi att medeltiden i systemet för en godtycklig kund är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\mu + i\alpha} \right) p_k$$