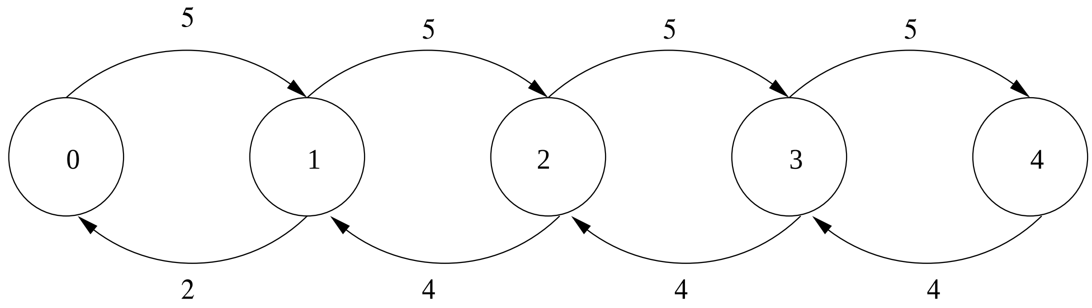
Lösningar till tentamen i Köteori och Kösystem, mars 2007

Uppgift 1

a) Markovkedjan ser ut så här:



Observera att eftersom $\bar{x} = 0.5$ så blir $\mu = 1/\bar{x} = 2$.

b) Först beräknar vi tillståndssannolikheterna med snittmetoden:

$$\begin{cases} 5p_0 = 2p_1 \\ 5p_1 = 4p_2 \\ 5p_2 = 4p_3 \\ 5p_3 = 4p_4 \\ p_0 + \cdots + p_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = \dfrac{128}{1973} \\ p_1 = \dfrac{320}{1973} \\ p_2 = \dfrac{400}{1973} \\ p_3 = \dfrac{500}{1973} \\ p_4 = \dfrac{625}{1973} \end{cases}$$

Nu kan vi använda definitionen på medelvärde vilket ger:

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^{4} k \cdot p_k = \frac{5120}{1973} \approx 2,5950$$

c) Definitionen på medelvärde ger:

$$\bar{N}_S = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot (p_2 + p_3 + p_4) = \frac{3370}{1973} \approx 1,7081$$

eftersom sannolikheten att en betjänare är upptagen är p_1 och sannolikheten att två betjänare är upptagna är $p_2 + p_3 + p_4$.

d) Enligt Littles sats får man

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda_{eff}} = \frac{5120/1973}{\lambda(1-p_4)} = \frac{5120/1973}{5\cdot\left(1-625/1973\right)} = \frac{5120}{6740} \approx 0{,}7596$$

Uppgift 2

a) Vi kan använda formler för M/M/1-system, vilket ger

$$N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{\lambda_1/\mu_1}{1-\lambda_1/\mu_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1-\lambda_1} = \frac{10}{15-10} = 2$$

$$N_2 = \frac{20}{40-20} = 1$$

$$N_3 = \frac{30}{40-30} = 3$$

$$N_4 = \frac{27}{50-27} = \frac{27}{23} \approx 1.17$$

b) Littles sats ger

$$T = \frac{N_1+N_2+N_3+N_4}{\lambda_1+\lambda_2} \approx 0.24$$

c) Först beräknar vi medeltiden som en kund tillbringar i kösystem nummer 1,3 och 4 med hjälp av Littles sats:

$$T_1 = \frac{N_1}{\lambda_1} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$T_3 = \frac{3}{30} = 0.1$$

$$T_4 = \frac{27/23}{0.9\cdot 30} \approx 0.043$$

Därefter får man till exempel genom att titta på olika vägar genom systemet att den efterfrågade tiden måste vara

$$T_1 + T_3 + 0.9\cdot T_4 \approx 0.34$$

d) Om ankomstintensiteten är 100 per sekund så blir både kösystem 1 och 2 överbelastade. Utintensiteten från dem blir då lika med betjäningsintensiteten vilket innebär att sammanlagda ankomstintensiteten till kösystem 3 blir 55 per sekund. Därmed är även kösystem 3 överbelastat så dess utintensitet är 40 per sekund. Således blir ankomstintensiteten till kösystem 4

$$\lambda_4 = 0.9 \cdot 40 = 36$$

vilket medför att medelantal kunder blir

$$N_4 = \frac{36}{50-36} \approx 2.57$$

Uppgift 3

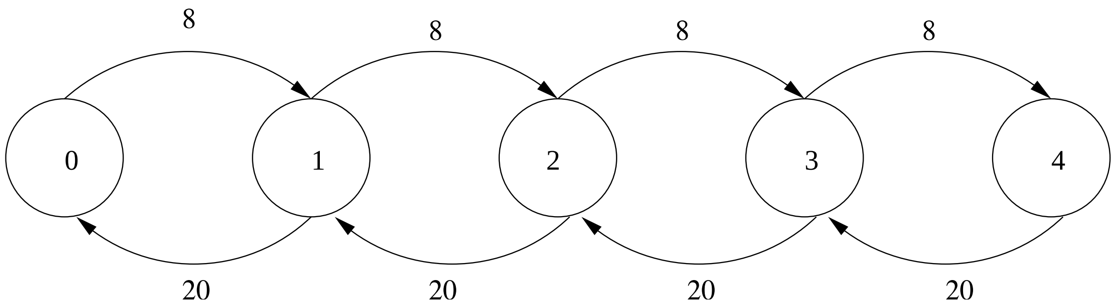
a) En slagning i Erlangtabellen ger att spärrsannolikheten är

$$E_m(\rho) = E_{20}(16) \approx 0{,}064411$$

b) Erlangtabellen ger oss

$$E_{m_{ny}}(16) < \frac{0{,}06411}{2} \Rightarrow m_{ny} \text{ ska vara minst 23}$$

c) Här kan Erlangtabellen inte användas utan vi måste rita en markovkedja. Den ser ut så här:



Sannolikheten att en kund spärras är p_4. Vi beräknar tillståndssannolikheterna på vanligt vis med snittmetoden, vilket ger

$$p_3 = \frac{20}{8} p_4 = \frac{5}{2} p_4,\ p_2 = \frac{5}{2} p_3 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 p_4,\ p_1 = \frac{5}{2} p_2 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 p_4,\ p_0 = \frac{5}{2} p_1 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 p_4$$

$$\sum_{k=0}^{4} p_k = 1 \Rightarrow p_4 = \frac{1}{1 + 5/2 + \left(5/2\right)^2 + \left(5/2\right)^3 + \left(5/2\right)^4} = \frac{16}{1031} \approx 0{,}0155$$

Uppgift 4

a) Först beräknar vi ankomstintensiteten till kösystem nummer 4. Vanlig räkning med en återkoppling ger oss

$$\lambda_3 = (\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha\lambda \Rightarrow \lambda_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1-\alpha} = \frac{9}{0.6} = 15$$

Därefter får vi

$$N_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \mu_3} = \frac{15}{20-15} = 3$$

b) För väntsystemen får man svarstiden som

$$T_i = \frac{N_i}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{\rho_i}{1-\rho_i} = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i / \mu_i}{1-\lambda_i / \mu_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$$

vilket ger

$$T_1 = \frac{1}{5-4} = 1$$

$$T_2 = \frac{1}{8-5} = \frac{1}{3}$$

$$T_3 = \frac{1}{20-15} = \frac{1}{5}$$

$$T_5 = \frac{1}{9-3} = \frac{1}{6}$$

Svarstiden i system 4 blir helt enkelt medelbetjäningstiden det vill säga 0.5 s.

c) Ett resonemang med olika vägar ger att svaret blir

$$T_{Tot} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}T_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}T_2 + \frac{N_3}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\beta(\lambda_1+\lambda_2)(1-E_5(\rho_4))}{\beta(\lambda_1+\lambda_2)(1-E_5(\rho_4)) + (1-\beta)(\lambda_1+\lambda_2)}T_4 +$$

$$\frac{(1-\beta)(\lambda_1+\lambda_2)}{\beta(\lambda_1+\lambda_2)(1-E_5(\rho_4)) + (1-\beta)(\lambda_1+\lambda_2)}T_5 = \frac{4}{9}\cdot 1 + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2/3 \cdot (1-0{,}11)}{2/3 \cdot (1-0{,}11) + 1/3}\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1/3}{2/3 \cdot (1-0{,}11) + 1/3}\cdot\frac{1}{6} = 1{,}343s$$

d) $\lambda_{spärr} = (\lambda_1 + \lambda_2)\cdot \beta \cdot E_5(\rho_4) = 9 \cdot 2/3 \cdot 0{,}110054 = 0{,}66$ jobb/s

Uppgift 5

a) Vi börjar med att beräkna medelvärde och andramoment för betjäningstiden. Det enklaste är att använda definitionerna:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{0}^{0.1} 10tdt = 10\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{0.1} = \frac{1}{20}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_{0}^{0.1} 10t^2 dt = 10\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{0.1} = \frac{1}{300}$$

Nu kan vi beräkna medelantal kunder i systemet

$$N = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)} = \frac{1}{2} + \frac{10^2 \cdot (1/300)}{2(1-1/2)} = \frac{10}{12}$$

Littles sats ger sedan

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{12} \approx 0.083$$

b) Vi betingar på att betjäningstiden har längden t. Låt A vara antalet ankomster till systemet under en betjäningstid. Det ger

$$P(A=0 \mid X=t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-10t}$$

Sedan kan man ta bort betinget:

$$P(A=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A \mid X=t) f(t)dt = \int_{0}^{0.1} e^{-10t} \cdot 10dt = \left[-e^{-10t}\right]_0^{0.1} = 1 - e^{-1} \approx 0.63$$

c) Medelväntetiden i kön kan vi skriva som

$$W = \frac{N - N_s}{\lambda} = \frac{N - \rho}{\lambda} = \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)}$$

Det ger oss

$$W < 5 \Rightarrow \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} < 5 \Rightarrow \frac{10E(X^2)}{2(1-10 \cdot 0.09)} < 5 \Rightarrow E(X^2) < \frac{1}{10}$$

Detta motsvarar variansen

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0.1 - 0.09^2 = 0.0919$$

Uppgift 6

a) Intensiteten med vilken kunder kommer är 0.1 per sekund. Det betyder att betjäningsintensiteten måste vara minst 0.1 per sekund för att systemet ska vara stabilt. Således är svaret

$$\mu > 0.1$$

b) För ett stabilt system gäller att i det långa loppet så kommer lika många kunder att betjänas som det kommer till systemet. Det betyder att mellan två ankomster kommer det att betjänas en kund i medeltal. För ett instabilt system finns det alltid kunder att betjäna. Det betyder att det kommer att betjänas $10 \cdot \mu$ kunder per sekund.

c) Låt K vara antal kunder som betjänas mellan två ankomster om det alltid finns kunder i kösystemet. För alla värden på j gäller att

$$P(N = 0 \mid M = j) = P(K \geq j+1) = 1 - \sum_{r=0}^{j} P(K = r)$$

$$P(N = 1 \mid M = j) = P(K = j)$$

$$P(N = 2 \mid M = j) = P(K = j-1)$$

$$\vdots$$

$$P(N = j \mid M = j) = P(K = 1)$$

$$P(N = j+1 \mid M = j) = P(K = 0)$$

$P(N = j+2 \mid M = j) = 0$, sedan blir alla sannolikheter 0 för större värden på N.

För att få fram ett uttryck för $P(K = r)$ så konstaterar vi att avgångarna från betjänaren är en poissonprocess om det alltid finns kunder att betjäna. Då ger egenskaperna hos en Poissonprocess oss att

$$P(K = r) = \frac{(10\mu)^r}{r!} e^{-10\mu}$$