# Tentamen i Kösystem och Köteori torsdagen den 8 mars 2007

**Tillåtna hjälpmedel: formelsamling som vi tillhandahåller, allmän formelsamling av typ Tefyma, räknedosa**

**Alla svar måste motiveras.**

### *Uppgift 1*

Till ett kösystem kommer kunder i enlighet med en poissonprocess med intensiteten 5 $s^{-1}$. Systemet har två betjänare och två köplatser. Betjäningstiderna är exponentialfördelade med medelvärdet 0.5 s.

a) Rita en markovkedja som beskriver systemet.

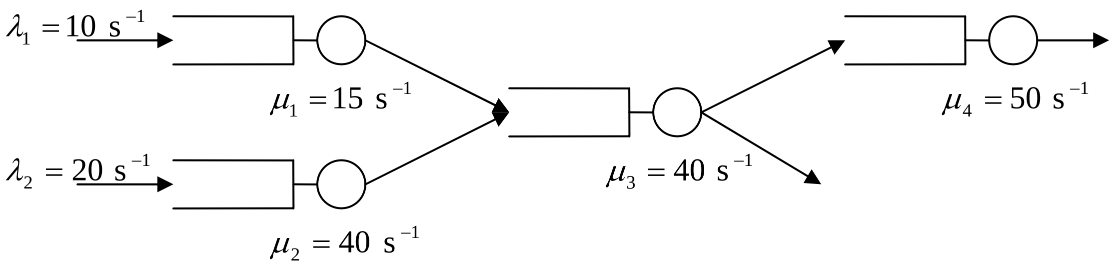
b) Beräkna medelantal kunder i systemet.

c) Beräkna den avverkade trafiken i systemet, det vill säga hur många betjänare som i medeltal är upptagna.

d) Beräkna medeltiden som en kund som ej spärras tillbringar i systemet.

### *Uppgift 2*

Betrakta könätet nedan. Ankomsterna till nätet är poissonprocesser och alla betjäningstider är exponentialfördelade. Köerna har oändligt många platser.




Sannolikheten att en kund som lämnar kösystem 3 fortsätter till kösystem 4 är 0.9.

a) Beräkna medelantal kunder i vart och ett av kösystemen.

b) Beräkna medeltiden som en godtycklig kund tillbringar i könätet.

c) Beräkna medeltiden som en kund som först kommer till kösystem 1 tillbringar i könätet.

d) Antag att $\lambda_1 = \lambda_2 = 100\ s^{-1}$. Hur många kunder kommer då i medeltal att finnas i kösystem 4?

### *Uppgift 3*

En webbserver tillåter maximalt 20 samtidiga sessioner. En session varar en exponentialfördelad tid med medelvärde 2 minuter. Nya sessioner kommer till servern med intensiteten 8 $\min^{-1}$ (poissonprocess). Om det redan finns 20 sessioner på gång så spärras den nya sessionen.

a) Vad är sannolikheten att en session spärras?

b) Hur många samtidiga sessioner måste man tillåta om spärrsannolikheten minst ska halveras jämfört med i a-uppgiften?

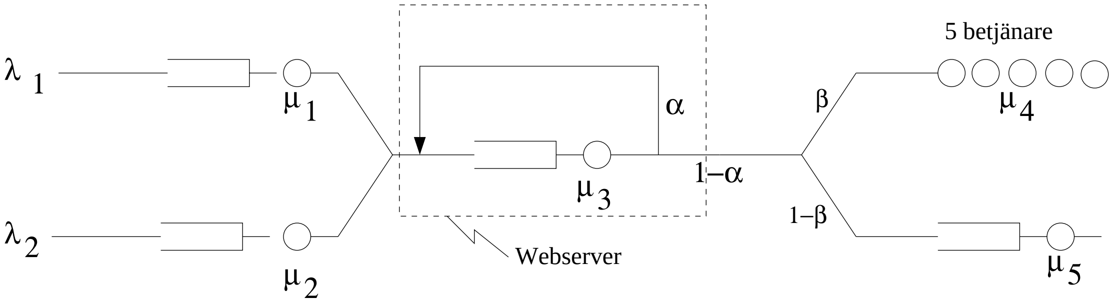
c) Antag att medeltiden för att betjäna en session om det finns $n$ sessioner i servern är

$$\frac{n}{\mu}$$

Betjäningstiderna är fortfarande exponentialfördelade. Om vi har samma ankomstintensitet som i uppgift a, tillåter maximalt 4 samtidiga sessioner och sätter $\mu = 20\,\min^{-1}$, vad blir då sannolikheten att en kund spärras?

### *Uppgift 4*

I ett könät enligt figur har delsystemen exponentialfördelade betjäningstider. Till könätet kommer jobb enligt Poissonprocesser. Väntsystemen har oändliga köer.




$$\lambda_1 = 4s^{-1}\ \lambda_2 = 5s^{-1}\ \mu_1 = 5s^{-1}\ \mu_2 = 8s^{-1}\ \mu_3 = 20s^{-1}\ \mu_4 = 2s^{-1}\ \mu_5 = 9s^{-1}\ \alpha = 0.4\ \beta = 2/3$$

a) Beräkna medelantalet kunder i webbservern (kösystem 3 + återkopplingen)

b) Beräkna svarstiden i vart och ett av de fem kösystemen.

c) Bestäm medeltiden i könätet för de kunder som inte spärras.

d) Bestäm antalet spärrade jobb/s i kösystem 4.

***Uppgift 5***

För ett M/G/1-system gäller

$$N = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)}$$ där $N$ är medelantal kunder i kösystemet.

a) Ankomsterna till ett M/G/1-system är en poissonprocess med intensiteten 10 $s^{-1}$ och betjäningstiderna har frekvensfunktionen

$$f(t) = \begin{cases} 10 & 0 \le t \le 0.1 \\ 0 & f.ö. \end{cases}$$

Beräkna medeltiden som en kund tillbringar i systemet.

b) Vad är sannolikheten att det inte kommer några nya kunder till kösystemet i uppgift a under en betjäning?

c) Antag att vi har samma ankomstprocess som i a-uppgiften och att betjäningstidens medelvärde är 0.09. Vilken är den största variansen som betjäningstiden kan ha utan att medelväntetiden i kön överskrider 5 sekunder?

***Uppgift 6***

I denna uppgift ska vi studera ett D/M/1-system. Tiden mellan ankomsterna är alltid 10 sekunder och betjäningstiderna är exponentialfördelade och har medelvärdet $1/\mu$ sekunder.

a) För vilka värden på $\mu$ är kösystemet stabilt?

b) Hur många kunder kommer att betjänas i medeltal mellan två ankomster till kösystemet? Svara både för ett stabilt och ett instabilt system.

c) Antag att det finns $M$ kunder i systemet precis före en ankomst och att $N$ är antalet kunder precis före nästa ankomst till systemet. Beräkna

$$P(N = i \mid M = j)$$

för alla tänkbara värden på $i$ och $j$.