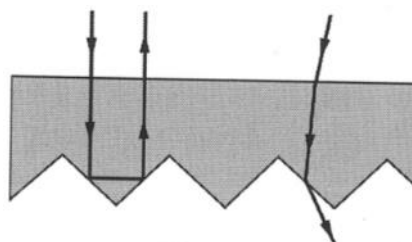


Tentamen i Fotonik - 2014-04-25, kl. 08.00-13.00

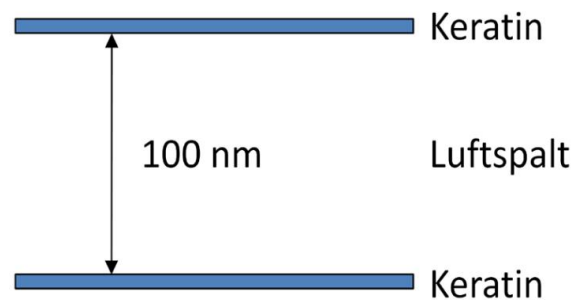
FAFF25 - Fysik för C och D, Delkurs i Fotonik

- **Tillåtna hjälpmedel:** Miniräknare, godkänd formelsamling (t ex TeFyMa), utdelat formelblad.
- **OBS! Mobiltelefon** får ej finnas i fickan eller framme på bordet!
- Börja varje ny uppgift på ett nytt blad och skriv bara på en sida av pappret.
- Skriv namn på varje blad och numrera sidorna i övre högra hörnet.
- Lösningarna ska vara renskrivna och väl motiverade. Uppgifter utan svar ger inte full poäng!
- Varje korrekt löst uppgift ger 3 poäng efter en helhetsbedömning. För godkänt krävs minst 12 poäng.

- En plan elektromagnetisk våg utbreder sig i ett material med brytningsindex n . Vågen beskrivs av ekvationen: $E(x, t) = E_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \right]$ och har följande egenskaper:
 - Våglängden: 400 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$)
 - Periodtiden: 2,0 fs ($1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$)
 - Faskonstanten: 0,0 radianer
 - Amplituden: 100 Volt/meter
 - Vågen rör sig åt höger, i positiv x-riktning.
 - Bestäm brytningsindex för materialet i vilken vågen utbreder sig.
 - Rita vågen både som funktion av position (då tiden är $t = 1,0 \text{ fs}$) och som funktion av tid (för positionen $x = 0,0 \text{ nm}$).
- På botten av en bägare ligger ett mynt. Bägaren innehåller genomskinlig mineralolja ($n_m = 1,573$) upp till en höjd av 6,0 cm. Ovanför oljan finns ett 8,0 cm tjockt lager alkohol ($n_a = 1,450$). Hur långt ifrån sitt verkliga läge förefaller myntet befinna sig för en iakttagare, som tittar rakt ner i bägaren?
- Diskussionsuppgift.*
En luftbubbla inuti en glasbit fungerar som en liten lens. Kommer luftbubblan att sprida ut eller samla ljusstrålar? Rita en figur och motivera ditt svar!
- De gula reflexer som brukar sitta i cykelhjulen har kubhörn i pressad plast på baksidan. Se figur. Cykelreflexen fungerar bra bara så länge det infallande ljuset håller sig nära normalen till reflexen. Då totalreflekteras ljuset i kubhörnen såsom den vänstra delen av figuren visar. Till höger i figuren visas en sned stråle som inte totalreflekteras. För vilka infallsvinklar (i förhållande till cykelreflektorns normal) ger den typen av sned stråle upphov till totalreflektion i baksidan? Antag att brytningsindex i plasten är 1,50 och att reflexen är omgiven av luft.



5. Den blå Morpho-fjärilen (*Morpho Peleides*) lever i tropiska regnskogar och har ett vingspann större än 15 cm. Dess klara blå färg kommer inte från pigment utan är ett resultat av interferens i tunna skikt. Detta märks bland annat på att vingarna ändrar färg då man tittar på dem från olika vinklar, vilket gör att vingarna skimrar. Fjärilens vingar är täckta av två tunna lager keratin (ett genomskinligt ämne med brytningsindex 1,2) med en 100 nm luftspalt emellan. Keratinskikten är bara några få nanometer tjocka och ger i sig själv inte upphov till någon interferens i det synliga våglängdsområdet (se figuren nedan).
- Antag att ljus infaller normalt mot fjärilens vinge. För vilken våglängd i det synliga området fås konstruktiv interferens för det reflekterade ljuset? Du behöver bara ta hänsyn till reflektioner i de sidor av Keratinskikten som gränsar till luftspalten.
 - På vilket sätt påverkas denna våglängd om ljuset istället infaller med en vinkel i förhållande till normalen?
 - Om det regnar blir fjärilen blöt, och luftspalten fylls med vatten. För vilken våglängd i det synliga området fås nu konstruktiv interferens för det reflekterade ljuset vid normalt infall?

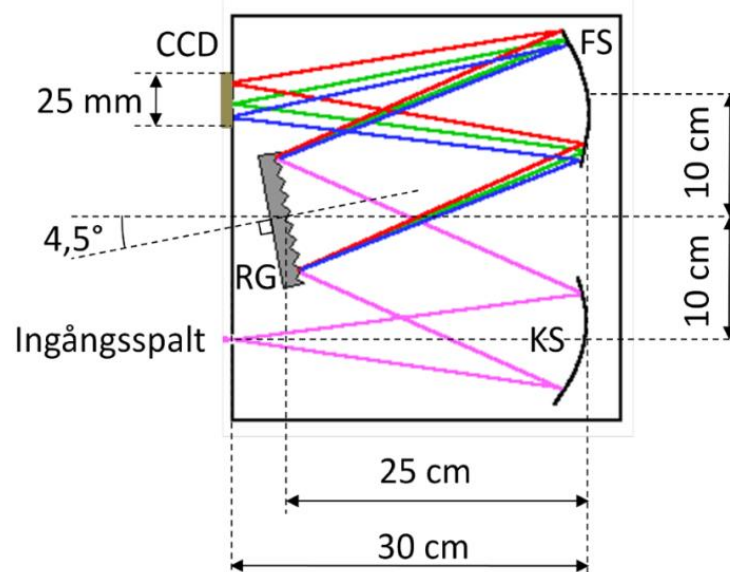


6. I en så kallad Nd:YAG-laser är lasringsmediet en YAG-kristall (Yttrium Aluminium Garnet) vilken dopas med Neodymium-joner till en koncentration av $1,38 \cdot 10^{20}$ joner/cm³ i vilka laserövergången sker. Lasring från Neodymium-jonerna sker från en övre nivå med en livstid på $230 \mu\text{s}$ vid en vakuumvåglängd på 1064 nm. Linjebreddden för laserövergången är 126 GHz. Brytningsindex för YAG vid 1064 nm är 1,8. Antag att 50,1% av Neodymium-jonerna är exciterade till den övre lasernivån. För varje rundtrip i kaviteten förloras en viss del av intensiteten, dels vid reflektion i ändspeglarna och dels genom interna förluster, så att intensitetsförändringen under en rundtrip är:

$$I_{n+1} = I_n \cdot e^{2\gamma(v_0)L} \cdot (1 - \delta)$$

Hur stora förluster, δ , kan man tillåta utan att lasringen upphör om YAG-kristallens längd är 1 mm?

7. Du ska bestämma egenskaperna hos en optisk fiber av okänd typ. Till din hjälp har du en diodlaser med våglängden 850 nm, en lens med brännvidden 10 mm samt en effektmätare. Du klipper till två bitar fiber, en bit på 10 m och en bit på 20 m och bestämmer dig för att mäta transmissionen hos dessa. Fiberns kärndiameter är tillräckligt stor för att förluster på grund av diffraktion (böjning) vid inkoppling kan försummas. Fokuseringen sker i luft.
- När du använder linsen för att koppla in laserljuset i fibern varierar du laserljusets diameter med en bländare. Du upptäcker att med en diameter större än 4 mm får du förluster i form av ljus som läcker ut i fiberns mantel. Vad är fiberns numeriska apertur?
 - Du minskar bländaröppningen något så att du är säker på att allt ljus som skickas in i fibern totalreflekteras och därför propagerar inne i fibern. I detta läge mäter du transmissionen genom de två fiberbitarna. Mätningen ger att när effekten som skickas in i fibern är 2,00 mW så är effekten efter fibern 1,77 mW för den 10 m långa fibern och 1,71 mW för den 20 m långa fibern. Förutsatt att du lyckats klippa fibrerna så att reflektionsförlusterna vid in- och utkoppling är desamma för de båda fibrerna, vad är brytningsindex för materialet i fiberns kärna?
 - Vad är brytningsindex för materialet i fiberns mantel?
8. I bilden visas en gitter-spektrometer av så kallad Czerny-Turner-typ. Det ljus man vill våglängdsbestämna sänds in mot ingångsspalten, som då fungerar som en punktkälla för ljus inuti spektrometern. Detta ljus kollimeras (görs parallellt) av en sfärisk spegel (KS) och riktas sedan mot ett reflektionsgitter (RG). Det ljus som lämnar gittret är fortfarande parallellt, men med en riktning som beror på ljusets våglängd. Den sista sfäriska spegeln (FS) fokuserar sedan ljuset på ett CCD-chip där de olika våglängderna därmed detekteras på olika positioner längs CCD-chipet. Gittret har 130 ritsar/mm och då gittrets vinkel är $4,5^\circ$ som i bilden så hamnar negativa andra ordningen ($m=-2$) av grönt ljus (550 nm) precis mitt på CCD-chipet. Vilken är den kortaste respektive längsta våglängd i negativa andra ordningen som kan fångas på CCD-chipet?

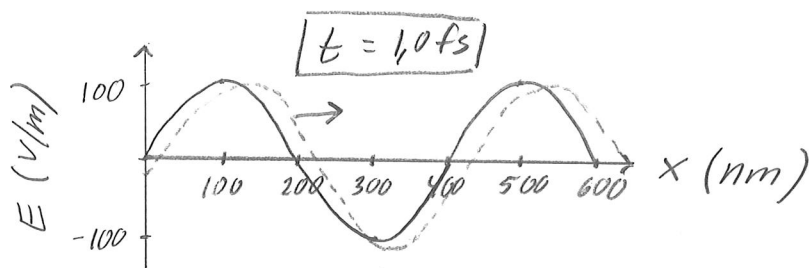
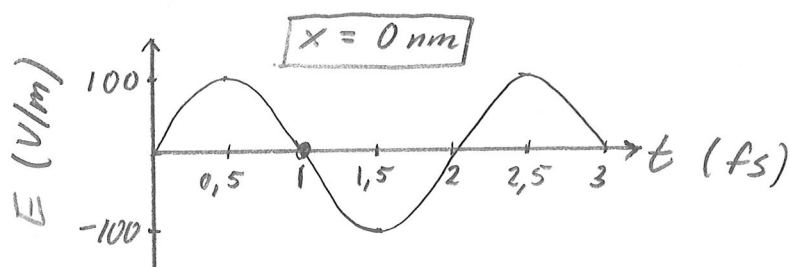


Svar och kortfattade lösningar till tentamen i Fotonik för CD 2014-04-25

① a) $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{400 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-15}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
 $n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8} = 1,5$

Svar: $n = 1,5$

b)



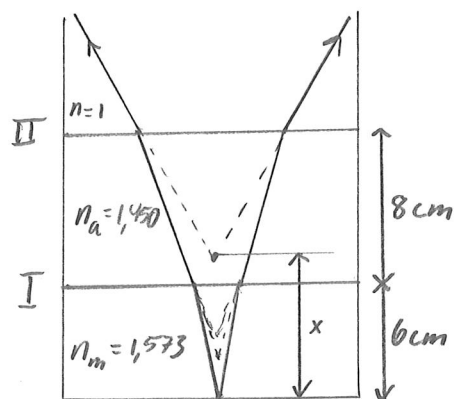
② Avbildning i sfärisk yta $\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}$

I: $a_1 = 6 \text{ cm}$ $n_1 = 1,573$
 $b_1 = ?$ $n_2 = 1,450$ $R = \infty$
 $\Rightarrow \frac{1,573}{6} + \frac{1,450}{b_1} = 0 \Rightarrow b_1 = -5,5 \text{ cm}$

II: $a_2 = 8 + 5,5 = 13,5 \text{ cm}$ $n_1 = 1,450$
 $b_2 = ?$ $n_2 = 1$ (luft)
 $R = \infty$

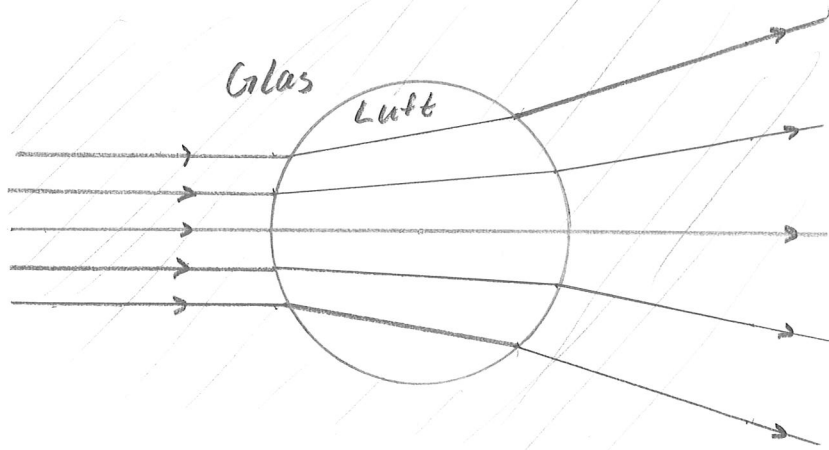
$\frac{1,450}{13,5} + \frac{1}{b_2} = 0 \Rightarrow b_2 = -9,3 \text{ cm}$

$x = 8 + 6 - 9,3 = 4,7 \text{ cm}$



Svar: 4,7 cm från sitt verkliga läge

- ③ Luftbubblan har lägre brytningsindex än det omgivande glaset. Alltså kommer ljuset brytas utåt i varje yta och bubblan fungerar som en inverterad lins. Den sprider alltså ut ljusstrålar.

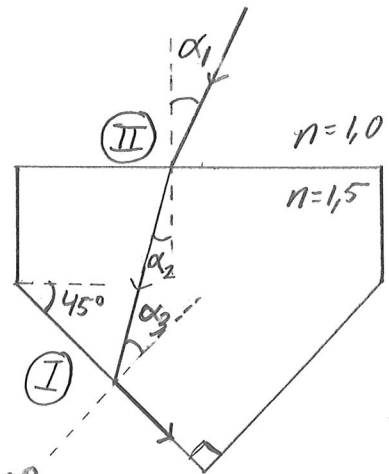


④ I: $1,5 \sin \alpha_3 = 1,0 \sin 90^\circ = 1$
 $\Rightarrow \alpha_3 = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41,8^\circ$

II: $\alpha_2 = 45^\circ - \alpha_3 = 3,2^\circ$

$1,0 \sin \alpha_1 = 1,5 \sin \alpha_2$

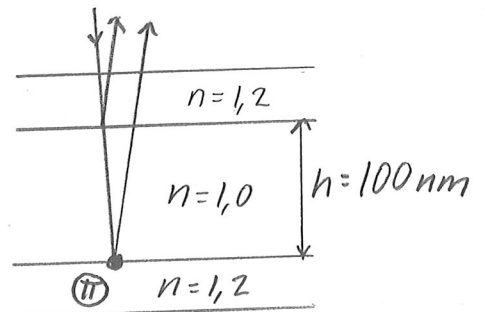
$\Rightarrow \alpha_1 = \arcsin(1,5 \sin 3,2^\circ) = 4,8^\circ$



Svar: $\alpha_1 \leq 4,8^\circ$

5

a) Konstruktiv interferens:



$$2nh = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot 1 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{m + 0,5} = \begin{cases} 400 \text{ nm} & m=0 \text{ (blå)} \\ 133 \text{ nm} & m=1 \text{ (ej synlig)} \end{cases}$$

Svar: 400 nm

b) Konstruktiv interferens med vinkel

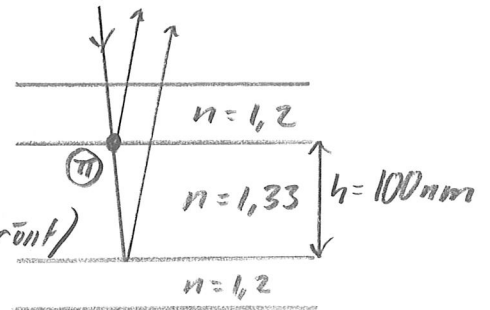
$$2nh \cos \theta_2 = (m + 0,5)\lambda$$

Vinkeln ökar $\rightarrow \lambda$ minskar

Svar: λ blir kortare

c) $2nh = (m + 0,5)\lambda$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1,33 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{m + 0,5} = \begin{cases} 532 \text{ nm}, & m=0 \text{ (grönt)} \\ 177 \text{ nm}, & m=1 \text{ (ej synlig)} \end{cases}$$



Svar: $\lambda = 532 \text{ nm}$

6) Lasring då $\frac{I_{n+1}}{I_n} = e^{2\delta L} (1 - \delta) > 1 \Rightarrow \delta < 1 - e^{-2\delta L}$

$L = 1 \text{ mm}$

$$\delta(\nu_0) = (n_2 - n_1) \frac{\lambda^2}{8\pi T} g(\nu_0)$$

$n_2 = 0,501 n_{\text{tot}}, n_1 = 0,499 n_{\text{tot}}, n_{\text{tot}} = 1,38 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{1064 \cdot 10^{-9}}{1,8} = 591 \text{ nm}$$

$T = 230 \mu\text{s}$

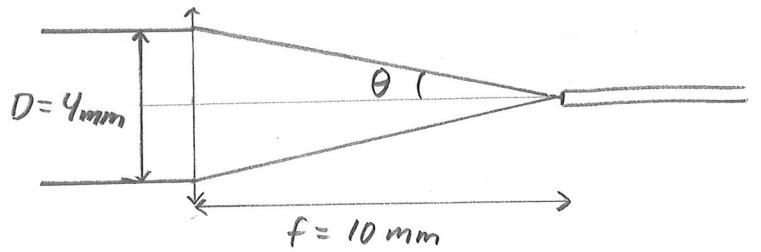
$$g(\nu_0) \approx \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{1}{126 \cdot 10^9} = 7,94 \cdot 10^{-12} \text{ s} = 7,94 \text{ ps}$$

$$\delta(\nu_0) = (0,501 - 0,499) \cdot 1,38 \cdot 10^{26} \cdot \frac{(591 \cdot 10^{-9})^2}{8\pi \cdot 230 \cdot 10^{-6}} \cdot 7,94 \cdot 10^{-12} = 132 \text{ m}^{-1}$$

$$\delta < 1 - e^{-2\delta(\nu_0)L} = 1 - e^{-2 \cdot 132 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 0,23$$

Svar: $\delta < 0,23$

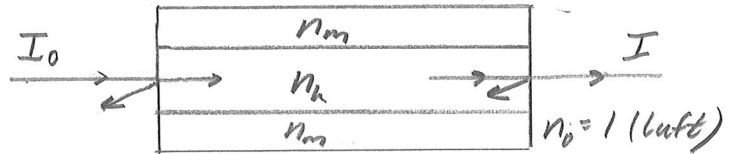
$$\textcircled{7} \quad \tan \theta = \frac{D}{2f}$$



$$\text{a) } NA = \sin \theta = \sin \arctan\left(\frac{4}{2 \cdot 10}\right) = 0,20$$

Svar: $NA = 0,20$

$$\text{b) Internna förluster: } 10^{-\alpha L/10}$$



Reflektionsförluster:

$$T^2 = (1-R)^2 \quad \text{där} \quad R = \left(\frac{n_k - 1}{n_k + 1}\right)^2$$

$$\Rightarrow I = I_0 T^2 10^{-\frac{\alpha L}{10}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1,77 = 2,00 \cdot T^2 \cdot 10^{-\frac{\alpha \cdot 10}{10}} \\ 1,71 = 2,00 \cdot T^2 \cdot 10^{-\frac{\alpha \cdot 20}{10}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1,77}{1,71} = 10^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \log\left(\frac{1,77}{1,71}\right) = 0,015 \text{ dB/m}$$

$$T = \sqrt{\frac{I}{I_0} 10^{\frac{\alpha L}{10}}} = \sqrt{\frac{1,77}{2,00} \cdot 10^{\frac{0,015 \cdot 10}{10}}} = 0,957$$

$$R = 1 - T = 0,043$$

$$\frac{n_k - 1}{n_k + 1} = \pm \sqrt{R} \Rightarrow 1 \pm \sqrt{R} = (1 \mp \sqrt{R}) n_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_k = \frac{1 \pm \sqrt{R}}{1 \mp \sqrt{R}} = \begin{cases} 1,522, & \text{tätare än luft} \\ 0,657, & \text{tunnare än luft} \end{cases}$$

Svar: $n_k = 1,522$

$$\text{c) } NA = \sqrt{n_k^2 - n_m^2}$$

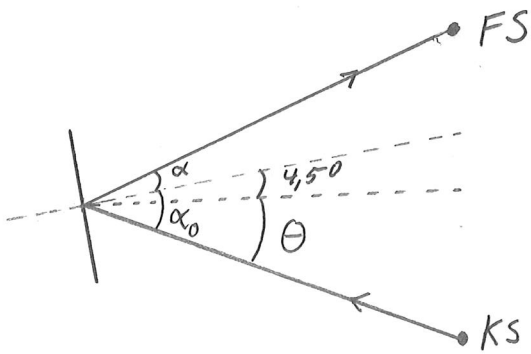
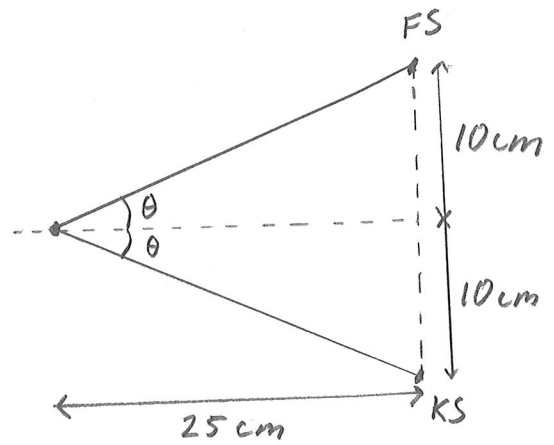
$$\Rightarrow n_m = \sqrt{n_k^2 - NA^2} = \sqrt{1,522^2 - 0,2^2} = 1,509$$

Svar: $n_m = 1,509$

8

$$\tan \theta = \frac{10}{25}$$

$$\Rightarrow \theta = 21,8^\circ$$



$$\alpha_0 = \theta + 4,5^\circ = 26,3^\circ$$

Gitterformeln:

$$d(\sin \alpha - \sin \alpha_0) = m\lambda$$

$$130 \text{ ritsar/mm} \Rightarrow d = \frac{1}{130 \cdot 10^3} = 7,7 \mu\text{m}$$

$$\begin{cases} \lambda_g = 550 \text{ nm} \\ m = -2 \end{cases}$$

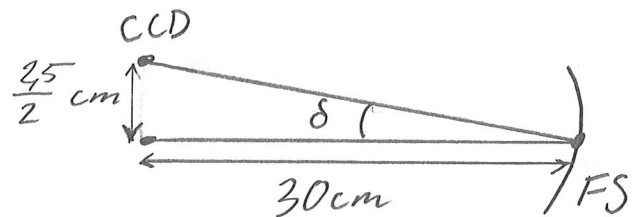
$$\sin \alpha_g = \frac{m\lambda}{d} + \sin \alpha_0$$

$$\Rightarrow \alpha_g = 17,47^\circ$$

$$= -\frac{2 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{7,7 \cdot 10^{-6}} + \sin 26,3^\circ$$

FS har brännvidden 30 cm

$$\tan \delta = \frac{2,5/2}{30} \Rightarrow \delta = 2,39^\circ$$



$$\alpha_{\max} = \alpha_g + \delta = 19,86^\circ$$

$$\alpha_{\min} = \alpha_g - \delta = 15,08^\circ$$

$$\lambda = \frac{d(\sin \alpha - \sin \alpha_0)}{m}$$

$$\lambda_1 = \frac{7,7 \cdot 10^{-6} (\sin 19,86^\circ - \sin 26,3^\circ)}{-2} = 398 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = \frac{7,7 \cdot 10^{-6} (\sin 15,08^\circ - \sin 26,3^\circ)}{-2} = 704 \text{ nm}$$

Svar: 398 nm < lambda < 704 nm